Turniej o Puchar Dyrektora
I LO im. Stanisława Dubois

Wprowadzenie

Poniższe opracowanie zawiera niemal 500 zadań dla uczniów szkół podstawowych i ponadpodstawowych pochodzących z organizowanego od 1998 roku Turnieju o Puchar Dyrektora I Liceum Ogólnokształcącego imienia Stanisława Dubois w Koszalinie, wraz z rozwiązaniami. Pozycja ta jest kontynuacją broszurki wydanej przez Firmę Uczniowską FERMAT w 2001 roku. Autorzy jej pisali między innymi:

> *Konkurs powstał z inicjatywy uczniów klasy matematycznej, a mógł on zaistnieć dzięki życzliwości nieżyjącego już dyrektora Lecha Żyły i obecnego dyrektora Rafała Janusa, humanisty rozumiejącego nasze zainteresowania matematyką. Turniej ma na celu poszerzanie zainteresowania tym ważnym i ciekawym przedmiotem wśród uczniów klas I i II szkół średnich jak i uczniów szkół podstawowych i gimnazjów oraz daje możliwość wyłonienia grupy osób szczególnie uzdolnionych...*

Konkurs adresowany jest do uczniów z uzdolnieniami matematycznymi. Uczeń zdolny to taki, który gotowy jest myśleć nieszablonowo i kreatywnie; nie opiera się jedynie na wyuczonych algorytmach ale umie dostrzec ukrytą głębię zadania i zrozumieć istotę rozważanego problemu. Rozwój takich umiejętności wymaga treningu z odpowiednimi zadaniami. W polskim środowisku edukacyjnym rolę taką pełni przede wszystkim Olimpiada Matematyczna - najstarszy ogólnopolski konkurs przedmiotowy, który najlepszym daje przepustkę na większość kierunków technicznych i ścisłych oferowanych na polskich uczelniach. W początkach Turnieju o Puchar literatura olimpijska była dość uboga, zwłaszcza w zadania dla początkujących. Próg trudności pomiędzy zadaniami szkolnymi a olimpijskimi nie jest łatwy do pokonania. Konkursy takie jak Turniej o Puchar Dyrektora, organizowane w bardzo niewielu miastach w Polsce, mają na celu pomóc uczniom najzdolniejszym wykonać pierwsze kroki w kierunku rywalizacji na Olimpiadzie. Wszystkim zaś, niezależnie od ich możliwości, dać mają te zmagania możność kontaktu z myśleniem nieszablonowym, z rozumowaniami wyzwolonymi od schematyczności - a więc czymś co jak się wydaje matematyka ma do zaoferowania każdemu także w kontekście jego życia codziennego; czymś czyniącym je ciekawszym i bardziej dojrzałym.

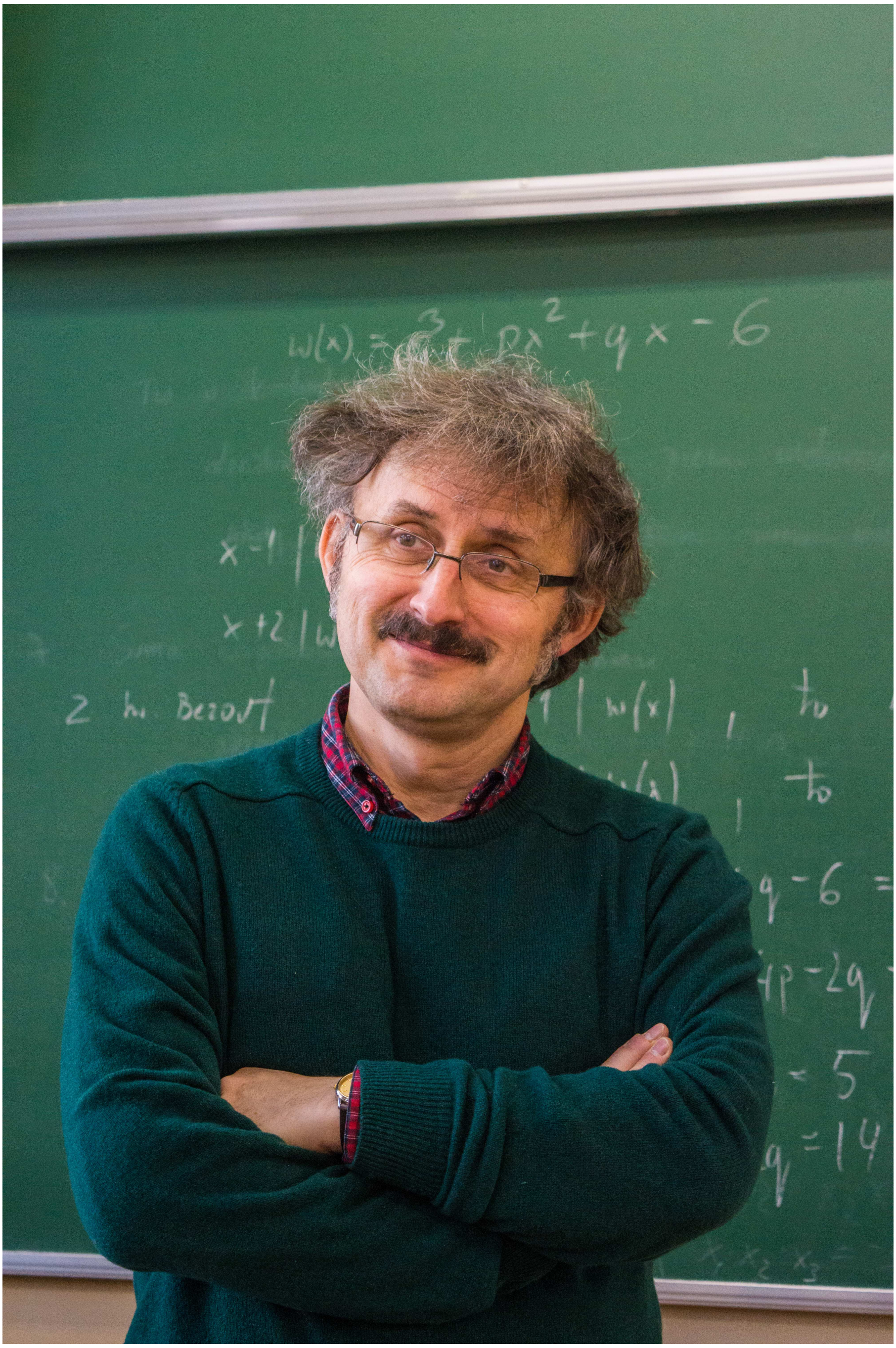
Inicjatorem Turnieju był Paweł Rudecki - nauczyciel i wychowawca wielce zasłużony dla popularyzacji matematyki zwłaszcza na Pomorzu, uhonorowany w 2018 roku tytułem Honorowego Profesora Oświaty. Z wielką pasją inspiruje On kolejne pokolenia uczniów klas matematycznych do uczestniczenia w kołach dla młodych talentów, próbowania sił w licznych konkursach, seminariach i obozach naukowych, czy wreszcie organizowania wydarzeń kulturalnych związanych z historią, znaczeniem i zastosowaniami matematyki.

Turniej przeprowadzany jest w dwóch kategoriach wiekowych: dla uczniów I-II klas liceum oraz dla uczniów z podstawówek/gimnazjów. W pierwszych latach istnienia dzielił się na część korespondencyjną, w której uczestnicy rozwiązywali samodzielnie zestaw zadań i przesyłali rozwiązania do Organizatorów oraz na część finałową odbywającą się w I LO w Koszalinie. Obecnie wstępna selekcja odbywa się jedynie na poziomie liceum. Ważnym elementem konkursu jest zaangażowanie w prace Jury najstarszych uczniów liceum. W ostatnich latach w ramach zawodów w młodszej kategorii rozwiązywane są także zadania testowe (wielokrotnego wyboru). Przez ponad dwadzieścia lat w murach I LO rywalizowało ponad tysiąc młodych adeptów matematyki, nie tylko z Koszalina, ale także z Kołobrzegu, Szczecina, Bydgoszczy, Torunia, Gdyni, czy licznych mniejszych pomorskich miejscowości.

Ze względu na konieczność zachowania przejrzystości opracowania, zadania turniejowe pogrupowano w działy tematyczne oraz według kategorii wiekowych. Z uwagi na zmiany w podstawie programowej niektóre rozdziały wymagają, zwłaszcza od ucznia szkoły podstawowej, przyswojenia sobie nowych pojęć czy faktów. Podobne wymagania stawia swoim uczestnikom Olimpiada Matematyczna, więc można uznać to podejście za uzasadnione. Nie ma w matematyce drogi na skróty!

Za pomoc w redakcji dziękuję mgr. Filipowi Smentkowi i Patrykowi Jaśniewskiemu.
Za wszystkie niedociągnięcia odpowiadam osobiście. Życzę miłego rozwiązywania!

Arkadiusz Męcel, Warszawa 2019



Profesor Paweł Rudecki

Wykaz oznaczeń

$\Rightarrow$	„wynika stąd, że...”
$\Leftrightarrow$	„jest to równoważne temu, że...”
$\vee$	„lub”
$\wedge$	„i”
$\emptyset$	Zbiór pusty.
$X = \{\ldots\}$	Zbiór X, składający się z pewnych elementów.
$x \in X$	Element x **należy** do zbioru X.
$x \notin X$	Element x **nie należy** do zbioru X.
$X \cup Y$	Suma zbiorów X i Y.
$X \cap Y$	Część wspólna zbiorów X i Y.
$\forall_{x \in X}$	„Dla każdego elementu x zbioru X...”
$\exists_{x \in X}$	„Istnieje element x zbioru X...”
$\mathbb{N}$	Zbiór liczb naturalnych: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	Zbiór liczb całkowitych.
$\mathbb{Q}$	Zbiór liczb wymiernych.
$\mathbb{R}$	Zbiór liczb rzeczywistych.
$\mathbb{R}_+$	Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.
$\|x\|$	Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x.
$[x]$	Część całkowita (cecha) liczby rzeczywistej x.
$x = \overline{abc}$	Liczba całkowita postaci $x = c \cdot 10^0 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^2$.
$a \mid b$	„a jest dzielnikiem b”
$\measuredangle ABC$	Miara kąta o wierzchołku w B i ramionach AB, BC.
$\|AB\|$	Długość odcinka AB.
$[A_1 A_2 \ldots A_n]$	Pole wielokąta wypukłego o kolejnych wierzchołkach $A_1, \ldots, A_n$
$n!$	Silnia liczby naturalnej n. Z definicji: $0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
$\binom{n}{k}$	Liczba k - elementowych podzbiorów zbioru n - elementowego.
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	Skrótowe oznaczenie sumy, inaczej: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Spis treści

Zadania konkursowe

W odpowiednich działach wystąpić mogą: zadania testowe wielokrotnego wyboru, w których przy każdej z możliwych odpowiedzi A-D wpisać należy TAK lub NIE, a także zadania otwarte z przynajmniej jednej kategorii wiekowej zawodów.

0.1 Proste zadania tekstowe

Początkowe problemy wymagają przeformułowania zagadnień „życiowych” na proste równania, układy równań lub proporcje. Przydatna będzie m.in. biegłość w rachunkach na procentach oraz dobre zrozumienie pojęcia średniej arytmetycznej.

Zadania testowe

Zadanie 1. Z miejscowości A do B samochód jechał ze średnią prędkością 50 km/h, a z powrotem ze średnią prędkością 70 km/h. Średnia prędkość na trasie $A \to B \to A$ wynosi:
(A) 55 km/h,
(B) $58\frac{1}{3}$ km/h,
(C) 60 km/h,
(D) $62\frac{1}{3}$ km/h.

Zadanie 2. Średni wiek zawodniczek grupy tanecznej wynosi 11 lat. Najstarsza zawodniczka ma 17 lat, a średni wiek pozostałych (bez najstarszej) jest równy 10 lat. Ta grupa taneczna składa się z:
(A) 5 zawodniczek,
(B) 6 zawodniczek,

(C) 7 zawodniczek,

(D) 8 zawodniczek.

Zadanie 3. Każdy uczeń pewnej klasy należy do koła matematycznego lub polonistycznego. Do koła matematycznego należy 20 uczniów, do koła polonistycznego 16, a do obu kół 6. W tej klasie jest:

(A) 42 uczniów,

(B) 30 uczniów,

(C) 36 uczniów,

(D) zbyt mała ilość danych nie pozwala okreslić liczby uczniów klasy.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 4. W 42 kg nasion znajduje się 10% zanieczyszczeń. Ile kilogramów tych zanieczyszczeń trzeba usunąć, aby nasiona zawierały tylko 6% zanieczyszczeń?

Zadanie 5. Stefan i Marian mają razem 82 lata. Urodziny Mariana były wtedy, gdy Stefan miał tyle lat, ile Marian miał lat, kiedy Stefan miał liczbę lat równą pewnej parzystej liczbie pierwszej podniesionej do kwadratu i pomnożonej przez 10. Ile lat ma Stefan, a ile Marian?

Zadanie 6. Po długiej rozłące spotkało się dwóch starych znajomych. Jeden z nich oznajmił, że ma trzech dorodnych synów. Iloczyn wieku tych synów jest równy 36, a suma ich wieku jest równa liczbie okien domu, przy którym spotkali się znajomi. Wówczas drugi znajomy powiedział, że nie może okreslić, ile lat ma każdy z synów. Wtedy pierwszy dodał, że jego starszy syn jest rudy i wówczas drugi podał wiek poszczególnych synów. Ile lat miał każdy z synów?

Zadanie 7. Siostra jest o 3 lata młodsza od brata. Brat ma obecnie 2 razy tyle lat ile miała jego siostra wtedy, kiedy brat miał tyle ile ma siostra teraz. Ile lat ma siostra, a ile brat?

Zadanie 8. Ślimak postanowił wejść na lampę o wysokości n metrów, gdzie n - ustalona wartość. Każdego dnia, przy słonecznej pogodzie, pokona 5 metrów. Natomiast przy deszczowej pogodzie w dzień pokona 3 metry, a w nocy zsunie się o 2 metry. Pogoda nie zmienia się w trakcie doby. Ile trwała możliwe najdłuższa podróż ślimaka, jeżeli rozpoczął i zakończył ją przy słonecznej pogodzie? W momencie dotarcia na szczyt ślimak nie zsuwa się. Ile razy padał deszcz?

Zadanie 9. Paweł i Gaweł wybrali się na spływ kajakowy w górę rzeki. 12 minut po wyruszeniu Paweł zorientował się, że podczas wsiadania do kajaka wypadło mu napompowane koło ratunkowe. Chłopiec natychmiast zawrócił, by je odnaleźć, wiosłując dwa razy szybciej niż dotychczas. Po jakim czasie Paweł dogoni Gawła uprzednio odnajdując zgubę, jeżeli prąd wody w rzece wynosi 5 km/h, a chłopcy rozpoczęli wyprawę z jednakową prędkością względem brzegu, równą 5 km/h?

Zadanie 10. Z dwóch przeciwległych punktów jednocześnie wychodzą naprzeciw siebie dwaj kurierzy i spotykają się w pewnym punkcie M. Gdyby pierwszy kurier wyszedł o godzinę wcześniej, a drugi o 30 minut później, to spotkaliby się o 18 minut wcześniej niż w rzeczywistości. Gdyby natomiast drugi wyszedł o godzinę wcześniej, a pierwszy o 30 minut później, to spotkaliby się w punkcie oddalonym od M o $5,6$ km. Wyznacz prędkości obu kurierów.

Zadanie 11. Koszałek - Opałek rozsypał na stole 10 sześciennych kostek to gry. Następnie policzył sumę wszystkich oczek na ściankach, które mógł zobaczyć nie przewracając kostek. Zapisał w swojej księdze wynik 186 i zaczął się zastanawiać, ile co najwyżej szóstek mogło być na niewidocznych ściankach. Pomóż mu, bo znów przegapi nadejście wiosny.

Zadanie 12. Klasa licząca 25 uczniów zakupiła 25 biletów do kina w drugim rzędzie z numerami od 1 do 25. Uczniowie losowali między sobą bilety, następnie każdy z nich obliczył sumę liczby określającej miejsce w kinie i liczby, pod którą jest zapisany w dzienniku. Wykaż, że co najmniej jeden uczeń otrzymał liczbę parzystą jako wynik tej sumy.

Zadanie 13. Mariusz może jeść mały tort w ciągu 10 minut, pizzę w ciągu 8 minut, a butelkę Coca-Coli w ciągu 15 minut. Kamil umie te same czynności wykonać w odpowiednio 2, 3 i 4 minuty. W jakim czasie mogą oni razem spożyć tort, pizzę i wypić Coca-Colę czyniąc to wspólnie?

Zadanie 14. Dwóch robotników pracując razem wykonało pewną pracę w ciągu 6 dni. Czas wykonania 40% całej pracy przez pierwszego robotnika jest o 2 dni dłuższy niż przez drugiego. W jakim czasie każdy z nich może samodzielnie wykonać tę pracę?

Zadanie 15. Jasiu ogląda finał Mistrzostw Świata w piłce nożnej, podczas którego Brazylia mierzy się w rzutach karnych z Polską. Zanim Polacy oddają pierwszy strzał, Jasiu wychodzi i kiedy wraca, ku swojemu przerażeniu odkrywa, że po 6 seriach strzałów Polska wygrała $4 - 2$. Nie wie, jaki przebieg (pod względem celności strzałów w kolejnych seriach) miała rozgrywka. Ile było różnych możliwości przebiegu konkursu rzutów karnych?

Zadanie 16. Ojciec dał każdemu z trzech synów po tyle złotych, ile mieli lat. Wydał 24 złote. Następnie nakazał: „Niech najmłodszy syn zatrzyma połowę pieniędzy dla siebie, a resztę pieniędzy podzieli równo między pozostałych braci.” Gdy polecenie zostało wykonane, ojciec ponownie wydał polecenie: „Niech teraz średni syn zatrzyma połowę pieniędzy dla siebie, a resztę podzieli równo między pozostałych braci.” Gdy również to zostało wykonane ojciec nakazał aby najstarszy syn zrobił dokładnie to samo. W rezultacie każdy z synów dostał jednakową kwotę. Ile lat miał każdy z braci?

Zadanie 17. Podczas śledztwa porównano zeznania Śledziaka, Maliniaka i Czerstwiaka. Śledziak mówi: „Maliniak mówi nieprawdę.” Maliniak mówi: „Czerstwiak mówi nieprawdę.” Czerstwiak mówi: „Śledziak mówi nieprawdę i Maliniak mówi nieprawdę.” Który z nich mówi prawdę, a który nieprawdę?

Zadanie 18. Marcin jest laureatem kilku olimpiad z języka niemieckiego. Jego koledzy zapytani o to, ilu olimpiad jest on laureatem odpowiedzieli:

> Tomek : *Marcin jest laureatem nie więcej niż* 5 *olimpiad.*
> Krzysiek: *Marcin jest laureatem mniej niż* 3 *olimpiad.*
> Mateusz : *Marcin jest laureatem co najwyżej* 4 *olimpiad.*
> Michał : *Marcin jest laureatem więcej niż* 2 *olimpiad.*

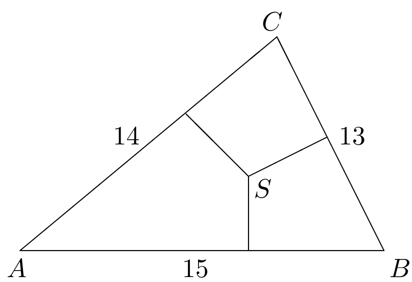
Laureatem ilu olimpiad jest Marcin, jeżeli tylko jedna osoba mówi prawdę?

Zadanie 19. Dwóch graczy obrywa płatki kwiatu stokrotki. Jednorazowo można zerwać dowolny lub dwa sąsiednie płatki. Wygrywa ten, kto zerwie ostatni płatek. Jak powinien grać drugi z graczy, aby wygrać?

Zadanie 20. Mamy 9 jednakowych z wyglądu monet, z których jedna różni się pod względem ciężaru od ośmiu pozostałych. Jak, i przy pomocy jakiej liczby ważeń na wadze szalkowej (bez odważników) wykryć fałszywą monetę?

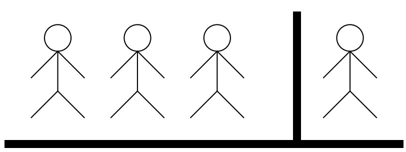
Zadanie 21. Masz 41 monet, z których jedna jest fałszywa (posiada inną wagę niż prawdziwa moneta). Ile, najmniej, ważeń musisz wykonać, aby jednoznacznie określić, czy fałszywa moneta jest lżejsza, czy cięższa?

Zadanie 22. Stacja kolejowa S została usytułowana w równej odległości od dróg łączących miejscowości A, B, C. Na planie zaznaczono odległości między miejscowościami i drogi dojazdowe do stacji S.



Drogi wychodzące z S są prostopadłe do dróg między miejscowościami. Oblicz, w jakiej odległości od głównych dróg wybudowano stację kolejową.

Zadanie 23. Na sali jest 4 detektywów ustawionych tak, jak na rysunku:



Przedzieleni są oni ścianą nieprzezroczystą, nieskończenie szeroką i wysoką (nie widać co jest po drugiej stronie). Każdy z nich wie, że jest ich 4. Światło zostaje zgaszone, a detektywom zostają nałożone na głowy – 2 białe i 2 czarne kapelusze. Po zapaleniu światła następuje długa cisza, w trakcie której detektywi próbują określić kolor swojego kapelusza. Mogą patrzeć tylko przed siebie i widzą tylko kapelusze osób przed sobą. Wszyscy patrzą w stronę ściany. Po dłuższej chwili jeden z nich podnosi rękę i oznajmia kolor swojego kapelusza. Który z nich mógł to zrobić i jaki kolor ustalił?

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 24. W jednym domu mieszkają 123 osoby, które mają razem 3813 lat. Czy można wybrać z tego domu stu mieszkańców tak, aby mieli razem nie mniej niż 3100 lat?

Zadanie 25. Smok ma 2000 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem 33, 21, 17 lub 1 głowę. Smokowi odrasta wtedy odpowiednio 48, 0, 14, 349 głów. Smok zostanie zabity, gdy wszystkie głowy zostaną ścięte. Czy jeden rycerz może zabić smoka?

0.2 Operacje algebraiczne

Do tworzenia skomplikowanych liczb rzeczywistych (na przykład startując ze zbioru liczb naturalnych) używamy operacji algebraicznych, pierwiastków, a także bardziej zaawansowanych funkcji: logarytmicznych, trygonometrycznych, wykładniczych itd. Skomplikowane wyrażenie algebraiczne nie jest jednak koniecznie najprostszą reprezentacją danej liczby. Zwłaszcza znajomość wzorów skróconego mnożenia pozwana na wykonywanie zaskakujących uproszczeń. Szczególnie istotna jest tu umiejętność odróżnienia liczb wymiernych, od niewymiernych.

Zadania testowe

Zadanie 26. Jaką liczbą jest $x = \frac{10}{\sqrt[3]{0{,}05}} - 2\sqrt[3]{2500}$?

(A) Naturalną

(B) Wymierną

(C) Całkowitą

(D) Niewymierną

Zadanie 27. Liczby $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oraz $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ to liczby:

(A) niewymierne,

(B) przeciwne,

(C) odwrotne,

(D) równe.

Zadanie 28. Liczba $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$ jest:

(A) wymierna,

(B) niewymierna,

(C) mniejsza od 3,

(D) równa 3.

Zadanie 29. Liczba odwrotna do liczby niewymiernej jest:

(A) zawsze niewymierna,

(B) nie zawsze niewymierna,

(C) zawsze całkowita,

(D) zawsze rzeczywista.

Zadanie 30. Jeśli $x = 3 - 2\sqrt{2}$ i $y = 3 + 2\sqrt{2}$, to wyrażenie $xy - x^2 + y^2$ ma wartość:

(A) $9 + \sqrt{2}$,

(B) 35,

(C) $35 - 24\sqrt{2}$,

(D) $35 + 24\sqrt{2}$.

Zadanie 31. Liczba $5 + \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$ jest równa:

(A) $\frac{157}{30}$,

(B) $4\frac{17}{30}$,

(C) $\frac{65}{30}$,

(D) $5\frac{5}{30}$.

Zadanie 32. Wyrażenie $6 + 2\sqrt{9 - \sqrt{-(3-x)^2}}$ może przyjąć wartość:

(A) $6 + 2\sqrt{6}$,

(B) 12,

(C) $12 - \sqrt{3}$,

(D) 2.

Zadanie 33. Ułamek $\frac{\sqrt{2}-2}{4+3\sqrt{2}}$ po usunięciu niewymierności z mianownika przyjmuje postać:

(A) $-\frac{2}{7}$,

(B) $\frac{10\sqrt{2}-14}{-2}$,

(C) $\frac{-5\sqrt{2}}{22}$,

(D) $-5\sqrt{2} + 7$.

Zadanie 34. Wiadomo, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Wtedy $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest równe:

(A) 27,

(B) 81,

(C) 47,

(D) 35.

Zadanie 35. Wartość sumy

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{7}{10} - \frac{1}{5} + \frac{9}{14} - \frac{1}{7} + \frac{11}{8} - \frac{1}{9} + \frac{13}{22} - \frac{1}{11} + \frac{15}{26} - \frac{1}{13}$$

wynosi:

(A) 3,

(B) $2\frac{433}{10296}$,

(C) $3\frac{1}{2}$,

(D) 4.

Zadanie 36. Dana jest liczba

$$a = \sqrt{1 + 2013\sqrt{1 + 2012\sqrt{1 + 2011\sqrt{1 + 2010 \cdot 2008}}}}.$$

Wówczas:

(A) $a > 2013$,

(B) $a = 2013$,

(C) $a = 2012$,

(D) $a < 2012$.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 37. Ile wynosi suma liczb ósmego, dziesiątego i setnego wiersza trójkątnej tablicy:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 3 & & & \\ & & 4 & & 5 & & 6 & & \\ & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & \\ 11 & & 12 & & 13 & & 14 & & 15 \end{array}$$

Zadanie 38. Obliczyć b, jeżeli wiadomo, że: $a = 5999$, $a \neq b$, $a^2 + a = b^2 + b$.

Zadanie 39. Wykazać, że jeżeli $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą, to liczbą całkowitą jest również $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

Zadanie 40. Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych zwiększony o liczbę środkową jest sześcianem liczby środkowej.

Zadanie 41. Wiadomo, że $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$. Określ znak liczby: $(1 - \frac{1}{a})(1 - \frac{1}{b})$.

Zadanie 42. Wykaż, że liczba $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ jest całkowita.

Zadanie 43. Czy liczba:

$$\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$$

jest liczbą naturalną?

Zadanie 44. Czy liczba $\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{7+\sqrt{48}}$ jest niewymierna?

Zadanie 45. Oblicz wartość sumy:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2.$$

Zadanie 46. Obliczyć:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Zadanie 47. Obliczyć:

1. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\left(1-\frac{1}{2004^2}\right)$,
2. $\frac{2^3-1}{2^2+2+1}+\frac{3^3-2^3}{3^2+6+2^2}+\frac{4^3-3^3}{4^2+12+3^2}+\ldots+\frac{2004^3-2003^3}{2004^2+2004\cdot 2003+2003^2}$.

Zadanie 48. Oblicz iloczyn:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 49. Oblicz sumę elementów każdego wiersza tablicy:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & & & & & & \\ 2 & 3 & 4 & & & & & & \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Zadanie 50. Oblicz sumę wszystkich elementów poniższej tablicy:

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n+2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 \end{array}\right|$$

Zadanie 51. Dana jest następująca tablica liczb naturalnych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \ldots & 3n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 2n & 3n & \ldots & n^2 \end{bmatrix}.$$

Oblicz n wiedząc, że suma wszystkich liczb tej tablicy jest równa 36100.

Zadanie 52. Oblicz wartość wyrażenia

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Zadanie 53. Rozstrzygnij czy podana liczba jest liczbą niewymierną:

$$\sqrt{24-2\sqrt{80}}-\sqrt{2\sqrt{20}+21}$$

Zadanie 54. Udowodnić, że $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ nie jest liczbą całkowitą.

Zadanie 55. Wyznacz część całkowitą liczby $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}}$..

Zadanie 56. Znaleźć sumę:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2.$$

Zadanie 57. Oblicz:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Zadanie 58. Wyznaczyć wartość całkowitą liczby

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}},$$

gdzie w każdym składniku zagnieżdżonych jest 2009 pierwiastków.

Zadanie 59. Oblicz wartość sumy $1+2\cdot3+3\cdot7+\ldots+n(2^n-1)$.

0.3 Równania i układy równań

Zadania zamieszczone w tym dziale dotyczą przede równań, których rozwiązaniami są liczby rzeczywiste. Podstawowe metody rozwiązania to umiejętne przekształcanie równań do postaci równoważnych oraz wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia. Szczególnie ważny jest fakt, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^2 \geqslant 0$, gdzie $x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

Zadania testowe

Zadanie 60. Jeżeli $a \otimes b = ab + a + b$ i $3 \otimes 5 = 2 \otimes a$, to a równa się:

(A) 4,

(B) 6,

(C) 7,

(D) 7.5.

Zadanie 61. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce k, aby rozwiązaniem równania $-5(x-4) + 2k = 3(k+4) - 3x$ była liczba mniejsza od $-\frac{1}{2}$?

(A) Większą od 9.

(B) Mniejszą od 9.

(C) Nie mniejszą ani równą 9.

(D) Większą od -9.

Zadanie 62. Liczby a i b są takie, że $a + b = 5$ i $ab = 3$. Wtedy:

(A) $a^2 + b^2 < 20$,

(B) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{3}$,

(C) $(a+1)^2 + (b+1)^2 = 31$,

(D) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 6$.

Zadanie 63. Jeżeli $a + b + c = 60$, $a + b + d = 70$, $a + c + d = 80$, $b + c + d = 90$, to suma $a + b + c + d$ jest równa:

(A) co najwyżej 90,

(B) co najwyżej 110,

(C) dokładnie 100,

(D) nie można jej obliczyć.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 64. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$$

Zadanie 65. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x+y=z \\ zy-z^2=1 \end{cases}$$

Zadanie 66. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=18 \\ (y+z)(x+y+z)=30 \\ (x+z)(x+y+z)=24 \end{cases}$$

Zadanie 67. Wiedząc, że liczby $a, b, c > 0$ spełniają układ równań:

$$\begin{cases} \frac{c}{a+b}=2 \\ \frac{c}{b-a}=3 \end{cases},$$

uporządkuj liczby a, b, c rosnąco.

Zadanie 68. Zbadać liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru m:

$$\begin{cases} y=|y|\cdot(x^2-1) \\ y=x+m \end{cases}$$

Zadanie 69. Rozwiązać równanie:

$$\frac{\left(\frac{2x^3}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}x^2}{2}\right)\div(1-x)\div\sqrt{2}}{x}=1.$$

Zadanie 70. Rozwiąż równanie: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=20.$

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 71. Dane jest n liczb różnych od zera i takich, że każda dwukrotność każdej liczby jest równa sumie pozostałych liczb. Wykaż, że $n=3$.

Zadanie 72. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}.$$

Zadanie 73. Rozwiązać układ równań w liczbach rzeczywistych:

$$\begin{cases} x + y + xy &= 19 \\ y + z + yz &= 11 \\ z + x + zx &= 14. \end{cases}$$

Zadanie 74. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 8 \end{cases} \cdot$$

Zadanie 75. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+y-1} - \frac{1}{x-y+1} = 1 \\ \frac{2}{x-y+1} - \frac{1}{x+y-1} = 1 \end{cases}$$

Zadanie 76. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} = \frac{31}{7} \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Zadanie 77. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} |x + y| = 1 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

Zadanie 78. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} (1 + x^2) \cdot y = x \\ 12y^3 + z = 3y + z \\ |3z - 5| = 1 - x \end{cases}$$

Zadanie 79. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{1999} = 1999 \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{1999}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{1999}^3 \end{cases}$$

Zadanie 80. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots x_{2004} & = & 2005 \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{2004}^2 & = & 2005^2 \\ \ldots & & \\ x_1^{2004} + x_2^{2004} + \ldots x_{2004}^{2004} & = & 2005^{2004} \end{cases}$$

Zadanie 81. Znaleźć największą możliwą wartość liczby z, jeżeli liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równości:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

Zadanie 82. Udowodnij, że jeżeli $x+y+z = 1$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 83. Dana jest liczba rzeczywista a. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

Zadanie 84. Rozwiąż równanie ($x \in \mathbb{R}$):

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5}.$$

Zadanie 85. Rozpatrz liczbę rozwiązań równania $|x| + |x - 1| = a$ w zależności od wartości parametru a.

Zadanie 86. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{xy - z^2} + \sqrt{yz - x^2} + \sqrt{xz - y^2} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Zadanie 87. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

Zadanie 88. Rozwiązać równanie

$$([2x + 1])^2 - x^2 + 7x + 8 = 0.$$

Zadanie 89. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie $[x + 1] = \frac{x-1}{2}$.

Zadanie 90. Rozwiązać równanie $[x] + [2x] + [3x] = 2005$.

Zadanie 91. Udowodnić, że istnieje taka liczba c, dla której równanie $[x\sqrt[3]{x}] + [y\sqrt[3]{y}] = c$, ma co najmniej 2005 różnych rozwiązań (x, y) w liczbach naturalnych.

Zadanie 92. Udowodnić, że jeżeli $a + b + c = 0$, to:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{a-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

Zadanie 93. Udowodnić, że jeżeli $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, to

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Zadanie 94. Rozwiąż równanie $tg^2(x + y) + \mathrm{ctg}^2(x + y) = 1 - 2x - x^2$.

Zadanie 95. Niech x oraz y będą liczbami rzeczywistymi z zakresu $\langle 0, \pi/2\rangle$. Udowodnić, że: $\sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 y + \cos^6 y = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

0.4 Nierówności

Także w przypadku nierówności kluczowym narzędziem są wzory skróconego mnożenia. Ważna jest także umiejętność szacowania, zwłaszcza w kierunku upraszczania skomplikowanych wyrażeń. Przydatna jest również znajomość podstawowych twierdzeń takich jak nierówności między średnimi, twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych, czy nawet nierówność Jensena.

Zadania testowe

Zadanie 96. Liczby naturalne, które spełniają nierówność $14-\frac{2(x+5)}{3} \leqslant 10-2(1-x)$ są:

(A) większe lub równe 1,

(B) mniejsze lub równe 1,

(C) nie większe niż 1,

(D) nie mniejsze niż 1.

Zadanie 97. Dana jest liczba $a > 1$. Porządek liczb $a, \frac{1}{a}, -a, \sqrt{a}$ jest następujący:

(A) $-a < \frac{1}{a} < \sqrt{a} < a$,

(B) $\sqrt{a} < a < \frac{1}{a} < -a$,

(C) $\frac{1}{a} < -a < a < \sqrt{a}$,

(D) $\sqrt{a} > -a > a > \frac{1}{a}$.

Zadanie 98. Nierówność $(x-2)(x-3) < 0$ jest prawdziwa dla:

(A) $x = 2$,

(B) $x = \sqrt{3}$,

(C) $x = \sqrt{15}$,

(D) każdej liczby rzeczywistej x.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 99. Wykazać, że jeżeli a, b, x są liczbami dodatnimi i $ab = 1$ to:

$$(x+a)(x+b) \geqslant (x+1)^2.$$

Zadanie 100. Rozwiąż nierówność: $\frac{1}{x-1} > 1$.

Zadanie 101. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie oraz $a+b=1$, to :

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqslant 9.$$

Zadanie 102. Udowodnić, że jeżeli a i b są liczbami dodatnimi takimi, że $a+b=1$, to zachodzi nierówność:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Zadanie 103. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność:

$$a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4abcd.$$

Zadanie 104. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}.$$

Zadanie 105. Pokazać, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to zachodzi nierówność:

$$\left(\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c^2a+a^2b+b^2c}{3}\right)^2 \geqslant 2a^2b^2c^2.$$

Zadanie 106. Udowodnij, że dla każdego x, y rzeczywistego dodatniego, zachodzi nierówność:

$$\frac{x^4+y^2}{x^2}+\frac{y^4+x^2}{y^2} \geqslant 2(x+y).$$

Zadanie 107. Pokazać, że jeżeli liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc=1$, to zachodzi nierówność:

$$\frac{2}{3}(a+b+c)+1 \geqslant \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a\right)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+b\right)}.$$

Zadanie 108. Udowodnij, że jeżeli $x, y \in [0;1]$, to:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$$

Zadanie 109. Wykaż, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $a^2+b^2+5 \geqslant 2a+4b$.

Zadanie 110. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z, zachodzi nierówność:

$$x^4+y^4+z^2+1 \geqslant 2x(xy^2-x-z+1).$$

Zadanie 111. Wykazać, że dla każdych $a, b, c > 0$ takich, że: $a+b+c = 1$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

Zadanie 112. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geqslant 2a(ab^2 - a + c + 1).$$

Zadanie 113. Udowodnić, że dla każdych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$(x^2 + yz)(y^2 + xz)(z^2 + xy) \geqslant 8(xyz)^2.$$

Zadanie 114. Wykazać, że jeżeli $a > 0, b > 0, c > 0$ to:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Zadanie 115. Udowodnić, że dla dowolnych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Zadanie 116. Wykazać, zę jeżeli $a, b, c > 0$, to $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 117. Udowodnić, że iloczyn trzech liczb rzeczywistych dodatnich o danej sumie, ma wartość największą, gdy czynniki są równe.

Zadanie 118. Dane są liczby dodatnie a_1, a_2, $\ldots$, a_{1998} takie, że: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{1998} = 1$. Udowodnij, że: $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_{1998}) \geqslant 2^{1998}$.

Zadanie 119. Wykazać, że jeżeli a, b, c, x są liczbami dodatnimi i jeżeli $abc = 1$ to

$$(x + a)(x + b)(x + c) \geqslant (x + 1)^3.$$

Zadanie 120. Udowodnić nierówność:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + ad + bc + bd - ab - cd) \geqslant 8\sqrt{abcd}$$

dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 121. Udowodnić, że jeżeli $a, b, c, d > 0$, to
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{b}{a} + \frac{d}{c} \geqslant 4.$$

Zadanie 122. Wykazać, że zachodzi nierówność:
$$\left(1 + \frac{1}{2000}\right)^{2000} \geqslant 2.$$

Zadanie 123. Udowodnij, że jeśli $a > b > 0$ i $m > n$, to:
$$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

Zadanie 124. Udowodnij, że jeśli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2002} > 0$, to:
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{2002}}{a_1} \geqslant 2002.$$

Zadanie 125. Udowodnić, że dla dowolnych liczby rzeczywistych: x, y zachodzi nierówność:
$$[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1.$$

Zadanie 126. Wiedząc, że kąty α, β, γ spełniają nierówność: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2$, wykazać, że: zachodzi: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}$.

Zadanie 127. Udowodnij, że jeżeli $a, b > 0$, to:
$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a + b}{2}\right)^3.$$

Zadanie 128. Wykazać, że ułamek
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}$$
zawiera się między największym i najmniejszym z ułamków:
$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \ (b_k > 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Zadanie 129. Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:
$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \leqslant \left(\frac{2n + 1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Zadanie 130. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a+1}{b+c+1} + \frac{b+1}{c+a+1} + \frac{c+1}{a+b+1} > \frac{3}{2}.$$

Zadanie 131. Udowodnić nierówność:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2009^2} < 1.$$

Zadanie 132. Udowodnić, że jeśli $a > 2$ i $b > 3$, to

$$\frac{a+b-5}{a+b-4} < \frac{a-2}{a-1} + \frac{b-3}{b-2}.$$

Zadanie 133. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geqslant 0.$$

Zadanie 134. Niech $a, b > 0$. Udowodnić, że $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt{5}ab$.

Zadanie 135. Udowodnij, że jeżeli liczby $a, b > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n + \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \geqslant 2^{n-1}.$$

Zadanie 136. Wykazać, że jeśli m i n są liczbami naturalnymi dodatnimi, to

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} \geqslant \frac{m+n}{m+n-1}.$$

Zadanie 137. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Zadanie 138. Udowodnij, że dla $a > 0$ oraz $b > 0$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Zadanie 139. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100} < \frac{1}{10}.$$

Zadanie 140. Wiedząc, że $a, b > 0$ udowodnić, że $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

Zadanie 141. Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność: $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Zadanie 142. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b > 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{ab}{a^2+b^2}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Zadanie 143. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$a^3+b^3+c^3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2(a+b+c).$$

Zadanie 144. Rozwiązać nierówność:

$$(tg^2x_1+tg^2x_2+\ldots+tg^2x_{1009})+(ctg^2x_1+ctg^2x_2+\ldots+ctg^2x_{1009})\leqslant 2018.$$

Zadanie 145. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i takich, że $a + b = 1$ zachodzi nierówność:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

0.5 Liczby pierwsze i podzielność

Zadania dotyczące liczb całkowitych są bardzo zróżnicowane, od sprawdzania czy liczba jest pierwsza/złożona, przez stosowanie testów podzielności przez daną liczbę, przez rozpatrywanie równań, w których poszukiwane są rozwiązania całkowite. Podstawowym wymaganiem jest zrozumienie i umiejętność stosowania twierdzenia o rozkładzie liczby całkowitej na czynniki pierwsze, a także stosowanie indukcji matematycznej. Do bardziej zaawansowanych metod należy opanowanie teorii wyznacznika liczby pierwszej w danej liczby całkowitej, znajomość Małego Twierdzenia Fermata, zasadniczego twierdzenia arytmetyki czy własności NWD.

Zadania testowe

Zadanie 146. Wartość wyrażenia $9^{20} \cdot 2 - 9^{19} \cdot 3 + 9^{18} \cdot 5$ jest liczbą podzielną przez:

(A) 2,

(B) 4,

(C) 7,

(D) 5.

Zadanie 147. Wartość wyrażenia $3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018}$ jest liczbą podzielną przez:

(A) 6,

(B) 4,

(C) 12,

(D) 120.

Zadanie 148. Liczby całkowite x i y są dodatnie, a ich suma jest liczbą podzielną przez 3. Wynika z tego, że:

(A) każda z liczb x, y jest podzielna przez 3,

(B) liczba $x^2 + y^2$ jest podzielna przez 3,

(C) liczba $x^2 - y^2$ jest podzielna przez 3,

(D) liczba $x + y$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 149. Zdaniem fałszywym jest zdanie:

(A) Liczba 4 dzieli różnicę kwadratów dowolnych liczb parzystych.

(B) Liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6 dla dowolnego n całkowitego.

(C) Liczba 5 jest dzielnikiem liczby $n^3 - n$ dla dowolnego n nieparzystego.

(D) Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

Zadanie 150. Liczbę t_n nazywamy trójkątną, jeżeli $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią. Czy dla liczb trójkątnych prawdą jest, że:

(A) $t_{39} + t_{49} = 2005$,

(B) istnieje takie n, że $t_{n+1} - t_n = n + 1$,

(C) dla każdego n zachodzi $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$,

(D) dla każdego n zachodzi $t_{n+1}^2 - t_n^2 = (n+1)^2$.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 151. Udowodnij, że liczba $4^6 + 4 \cdot 6^5 + 9^5$ jest zlożona.

Zadanie 152. Udowodnić, że liczba: $1 \cdot 100 + 3 \cdot 99 + 5 \cdot 98 + \ldots + 199 \cdot 1$ jest sumą kwadratów kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 153. Wykazać, że dla dowolnego całkowitego n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 154. Wykazać, że reszta z dzielenia liczby pierwszej przez 30 jest równa 1 lub jest liczbą pierwszą.

Zadanie 155. Udowodnij, że ułamek $\frac{14n+4}{21n+3}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ nie skraca się.

Zadanie 156. Wykaż, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^4+n^3+n^2+n+1}{n^3+n}$ nie jest liczbą naturalną.

Zadanie 157. Udowodnić, że liczba $123^{123} - 57^{57}$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 158. Udowodnić, że liczba: $19^{19} + 69^{69}$ jest podzielna przez 44.

Zadanie 159. Udowodnij, że liczba $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{99} + 2^{100}$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 160. Czy liczbę 2001 można przedstawić w postaci sumy sześcianów dwóch liczb naturalnych?

Zadanie 161. Czy liczba $3^{30} - 2 \cdot 6^{15} + 2^{32}$ jest liczbą złożoną?

Zadanie 162. Wykaż, że gdy n jest liczbą naturalną, to liczba $n^2 + 3n + 5$ nie dzieli się przez 121.

Zadanie 163. Udowodnić, że liczba $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2018}$ nie dzieli się przez 3.

Zadanie 164. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie: $xy = 3x + 8y + 1$.

Zadanie 165. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie: $17 - 2b^2 = (b^2 - a)(b^2 + a - 2)$.

Zadanie 166. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczby $2^n - 1$ i $2^n + 1$ są pierwsze.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 167. Niech p będzie liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, dla których funkcja:

$$f(x) = \frac{4x + 8 - p}{x + 2}$$

przyjmuje wartości całkowite.

Zadanie 168. Pewna liczba całkowita przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, a przy dzieleniu przez 4 daje resztą 1. Jaką resztę daje ta liczba przy dzieleniu przez 12?

Zadanie 169. Udowodnić, że $11^{10} - 1$ dzieli się przez 100.

Zadanie 170. Dowieść, że liczba $55^{37} - 77^{17}$ jest złożona.

Zadanie 171. Czy liczba $3^{30} - 2 \cdot 6^{15} + 2^{32}$ jest liczbą złożoną?

Zadanie 172. Udowodnij, że liczba $200^5 + 200 + 1$ jest złożona.

Zadanie 173. Dowieść, że liczba $2222^{5555} + 5555^{2222}$ dzieli się przez 7.

Zadanie 174. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $10^{10} + 10^{10^2} + \ldots + 10^{10^{1}0}$ przez 7.

Zadanie 175. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $100^n + (-1)^{n+1}$ jest podzielna przez 101.

Zadanie 176. Czy suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych może być kwadratem liczby całkowitej?

Zadanie 177. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze n, dla których suma $S_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 178. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p + 400$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 179. Wyznaczyć wszystkie trójki (p, q, r) kolejnych liczb pierwszych, dla których suma $p^2 + q^2 + r^2$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 180. Wykazać, że dla dwóch różnych liczb naturalnych n, k, liczby

$$2^{2^k} + 1, 2^{2^n} + 1$$

są względnie pierwsze.

Zadanie 181. Wykazać, że liczba naturalna n jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych dodatnich, to również liczba $2n$ jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych dodatnich.

Zadanie 182. Niech $p = 4k + 3$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że jeśli $a^2 + b^2$ jest podzielna przez p, to obie liczby a i b są podzielne przez p.

Zadanie 183. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej liczba:

$$\left[(2 + \sqrt{3})^n\right]$$

jest nieparzysta (przez $[a]$ rozumiemy największą liczbę całkowitą, która nie przekracza a).

Zadanie 184. Udowodnić, że $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nie jest liczbą całkowitą, dla każdego n.

Zadanie 185. Niech dana będzie liczba $n \in \mathbb{N}$. Przez wyrażenie $\varphi(n)$ oznaczamy ilość liczb naturalnych dodatnich mniejszych o n i względnie pierwszych z n. Pokazać, że jeżeli $k, n > 1$ są różnymi liczbami pierwszymi, to liczba k jest dzielnikiem sumy:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(p^i).$$

Zadanie 186. Wyznaczyć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych takich, że $pq + 1$ i $pq - 1$ też są liczbami pierwszymi.

Zadanie 187. Wyznacz wszystkie trójki (p, q, r) kolejnych liczb pierwszych, dla których suma $p^2 + q^2 + r^2$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 188. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych, które spełniają równanie:

$$(x + y - 2)(x - y - 2) - 11 = 0.$$

Zadanie 189. Rozwiąż równanie w zbiorze liczb całkowitych: $6xy = 2x + 9y + 14$.

Zadanie 190. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb całkowitych $x^2 + y^2 = 2019$.

Zadanie 191. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^2 + 3n + 5$ nie dzieli się przez 121.

Zadanie 192. Wiedząc, że liczby pierwsze p i q są różne pokazać, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

Zadanie 193. Udowodnić, że dla liczb naturalnych $n > 1$ liczby postaci $4 \cdot 2^{2^n} + 1$ są wszystkie złożone.

Zadanie 194. Wiedząc, że liczby a i b to dowolne całkowite dodatnie liczby względnie pierwsze udowodnić, że: $NWD(a+b, a^2+b^2) = 1$ lub $NWD(a+b, a^2+b^2) = 2$.

Zadanie 195. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej $n \geqslant 3$ iloczyn

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$$

jest podzielny przez liczbę n.

Zadanie 196. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $3a^2 + 7b^2 = 2018$.

Zadanie 197. Znajdź wszystkie liczby naturalne spełniające równanie:

$$\left(\left[\frac{9 + 7x}{8}\right]\right)^2 = x^2 - 3x - 16.$$

Zadanie 198. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

Zadanie 199. Znaleźć wszystkie pary (m, n) liczb naturalnych spełniających równanie

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^2.$$

Zadanie 200. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb całkowitych:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2.$$

Zadanie 201. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$(x + y - 3)(x - y - 3) - 5 = 0.$$

Zadanie 202. Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie:

$$(x_1^2 + 1) \cdot (x_2^2 + 2^2) \cdot (x_3^2 + 3^2) \cdot \ldots \cdot (x_n^2 + n^2) = 2^n \cdot n! \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

0.6 Zapis dziesiętny liczby całkowitej

Kontynuacja zadań o liczbach całkowitych. Ważną obserwacją wykorzystywaną w poniższych zadaniach jest fakt, że liczba x, która w zapisie dziesiętnym ma n cyfr (po lewej stronie przecinka) spełnia nierówność $10^{n-1} \leqslant x < 10^n$.

Zadania testowe

Zadanie 203. Cyfry $1, 2, 3, 4, 5, 6$ można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest:

(A) podzielna przez 3,

(B) podzielna przez 5,

(C) podzielna przez 9,

(D) liczbą pierwszą.

Zadanie 204. Suma cyfr liczby $10^{99} - 99$

(A) jest liczbą pierwszą,

(B) wynosi 189,

(C) jest liczbą mniejszą niż 1000,

(D) wynosi 891.

Zadanie 205. W trzycyfrowej liczbie nieparzystej i podzielnej przez 5 suma cyfr dziesiątek i setek jest równa cyfrze jedności, natomiast suma cyfr dziesiątek i jedności jest cztery razy większa niż cyfra setek. Tą liczbą jest:

(A) 325,

(B) 145,

(C) 347,

(D) 235.

Zadanie 206. Wszystkich liczb siedmiocyfrowych, których suma cyfr wynosi 3 istnieje:

(A) 28,

(B) 27,

(C) 22,

(D) 21.

Zadanie 207. Tysiąc jedenasta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{2}{26}$ wynosi:

(A) 4,

(B) 2,

(C) 6,

(D) 8.

Zadanie 208. Trzy ostatnie cyfry liczby $625^{2019} + 376^{2020}$ wynoszą:

(A) 101,

(B) 001,

(C) 401,

(D) 601.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 209. Udowodnij, że rozwinięcie dziesiętne $2^{1000000}$ ma ponad 300000 cyfr.

Zadanie 210. Czy liczbę 100 można przedstawić w postaci sumy liczb jednocyfrowych lub dwucyfrowych tak, aby była przy tym użyta każda z 10 cyfr i to tylko jeden raz?

Zadanie 211. Czy istnieje liczba naturalna n taka, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^n występuje 1000 zer, 1000 jedynek, 1000 dwójek, ..., 1000 dziewiątek?

Zadanie 212. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 10000 i podzielnych przez 6, które można zapisać za pomocą cyfr $0, 1, 2$?

Zadanie 213. Czy liczba postaci $\overline{ABAB}$ może być kwadratem liczby naturalnej?

Zadanie 214. Znaleźć liczbę czterocyfrową będącą kwadratem liczby naturalnej, która posiada dwie pierwsze cyfry równe sobie i dwie ostatnie też równe sobie.

Zadanie 215. Jeżeli przestawimy cyfry pewnej liczby naturalnej n, to otrzymamy liczbę naturalną k. Udowodnij, że jeżeli $n + k = 10^{10}$, to liczba n jest podzielna przez 10.

Zadanie 216. Rozwiąż równanie:

$$\overline{xyztzy} + \overline{zyxyzt} = \overline{yxyztz}.$$

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 217. Udowodnić, że liczba postaci: $\underbrace{111\ldots11}_{p}$ nie dzieli się przez p, jeśli p jest liczbą pierwszą większą od 3.

Zadanie 218. Czy wśród liczb postaci: $1001001001001\ldots001$ znajduje się liczba pierwsza?

Zadanie 219. Znajdź cyfry A, B takie, że:

$$\overline{AAB} + \overline{BB} = \overline{BAA}.$$

Zadanie 220. Wykazać, że żadna liczba sześciocyfrowa postaci $ABCABC$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 221. Wyznaczyć cztery ostatnie cyfry liczby 5^{5555}.

Zadanie 222. Wyznaczyć dwie ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby:

$$2^{5^1} + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + \ldots 2^{5^{2009}} + 2^{5^{2010}}.$$

Zadanie 223. Udowodnij, że liczba 1280000401 jest złożona.

0.7 Związki miarowe boków i kątów w wielokątach

Pierwszy z geometrycznych podrozdziałów sprawdza znajomość podstawowych faktów dotyczących związków pomiędzy miarami boków i kątów w wielokątach. Są to na przykład: twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych wielokąta, twierdzenie Pitagorasa, trójkąty szczególne (tzw. $45-45-90$ oraz $30-60-90$), twierdzenie Talesa, twierdzenie o dwusiecznej, kryteria przystawania i podobieństwa trójkątów. W niektórych zadaniach w starszej kategorii wiekowej konieczne będzie także użycie podstawowych wiadomości z trygonometrii. Konieczna jest także znajomość podstawowych obiektów związanych z geometrią trójkąta: wysokości, środkowych, dwusiecznych i związanych z nimi: ortocentrum i środka ciężkości.

Zadania testowe

Zadanie 224. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC mają długości 18 cm i 24 cm. Najdłuższy bok trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC ma długość 5 cm. Stąd wynika, że:

(A) $|A_1B_1| = 6|AB|$,

(B) $|CB| = 6|C_1B_1|$,

(C) obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest 6 razy mniejszy niż obwód trójkąta ABC,

(D) pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest 36 razy mniejsze niż pole trójkąta ABC.

Zadanie 225. W trójkącie prostokątnym KLM przeciwprostokątna KL ma długość 24 cm, a kąt MKL ma $60°$. Stąd wynika, że:

(A) $|KM| = 12$ cm.

(B) Środkowa trójkąta poprowadzona z wierzchołka M ma długość 12 cm.

(C) Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość $6\sqrt{3} - 6$.

(D) Pole trójkata równa się $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24$.

Zadanie 226. Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości $8\sqrt{3}$ wybrano punkt P. Suma odległości punktu P od wszystkich boków trójkąta jest równa:

(A) to zależy od położenia punktu P,

(B) $8\sqrt{3}$,

(C) 12,

(D) $12\sqrt{3}$.

Zadanie 227. Przedłużenia ramion trapezu równoramiennego o podstawach długości 6 i 2 i obwodzie równym 18 z krótszą podstawą tego trapezu wyznaczają trójkąt, którego obwód jest równy:

(A) 8,

(B) 7,

(C) 10,

(D) 7.5.

Zadanie 228. Figura powstała przez połączenie środków kolejnych boków trapezu równoramiennego może być:

(A) równoległobokiem

(B) prostokątem

(C) rombem

(D) kwadratem.

Zadanie 229. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 9 i dzieli trapez na dwa trapezy o obwodach 22 i 30. Długości podstaw tego trapezu wynoszą:

(A) $a = 5, b = 13$

(B) $a = 4, b = 14$

(C) $a = 9, b = 9$

(D) $a = 6, b = 12$.

Zadanie 230. Ile przekątnych ma wielokąt foremny o n bokach, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa $1080°$?

(A) 20

(B) $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

(C) $\frac{n(n-3)}{2}$

(D) 9,

Zadanie 231. Obwód trójkąta wynosi 28 cm. Średni bok jest o 1 cm dłuższy od najkrótszego i o 2 cm krótszy od najdłuższego. Które zdanie jest prawdziwe?

(A) Najdłuższy bok ma długość wyrażoną liczbą pierwszą.

(B) Suma najdłuższego i średniego boku równa jest 20 cm.

(C) Obwód trójkąta podobnego do danego w skali $10 : 1$ wynosi $2,8$ m.

(D) Boki danego trójkąta mają długości 11 cm; $0,09$ m; $0,8$ dm.

Zadanie 232. W trójkącie ABC dwusieczne kątów ABC i ACB przecinają się w punkcie D. Wiadomo, że miara kąta BCD jest równa $140°$. Miara kąta BAC jest równa:

(A) $120°$,

(B) $100°$,

(C) nie da się tego stwierdzić,

(D) $40°$.

Zadanie 233. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ poprowadzono wszystkie przekątne. Suma miar kątów $\measuredangle CAD + \measuredangle DBE + \measuredangle ECA + \measuredangle ADB + \measuredangle BEC$ wynosi:

(A) $270°$,

(B) $540°$,

(C) $180°$,

(D) $135°$.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 234. Czworokąt $ABCD$ jest taki, że trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB mają równe obwody. Czy wtedy czworokąt ten jest prostokątem?

Zadanie 235. W trapezie o podstawach długości a i b poprowadzono przez punkt przecięcia się jego przekątnych odcinek równoległy do podstaw. Znaleźć długość tego odcinka.

Zadanie 236. Na bokach AB, BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty E i F w ten sposób, że kąt FDC przystaje do kąta EDF. Udowodnij, że:

$$|AE| + |FC| = |DE|.$$

Zadanie 237. W trapezie $PQRS$ miara kąta QRS jest dwa razy większa od miary kąta QPS, zaś długość odcinka QR wynosi a, zaś odcinka RS wynosi b. Wyznacz długość odcinka PS.

Zadanie 238. Wykaż, że jeśli długości h_1, h_2, h_3 wysokości trójkąta spełniają równanie:

$$(h_1 h_3)^2 + (h_2 h_3)^2 = (h_1 h_2)^2,$$

to trójkąt ten jest prostokątny.

Zadanie 239. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że trójkąt DEM jest trójkątem równobocznym.

Zadanie 240. Wyznaczyć zależność między długościami boków trójkąta ABC, jeśli jego środkowa AD, wysokość BE i dwusieczna CF przecinają się w punkcie P.

Zadanie 241. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest 2 razy większy od kąta przy wierzchołku B. Dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$.

Zadanie 242. Wewnątrz trójkąta ABC ustalono punkt P, a na bokach AC, BC obrano odpowiednio punkty M, L, które spełniają warunki $\measuredangle PAC = \measuredangle PBC$, $\measuredangle PLC = \measuredangle PMC = 90°$. Udowodnić, że jeżeli punkt D jest środkiem boku AB, to $DM = DL$.

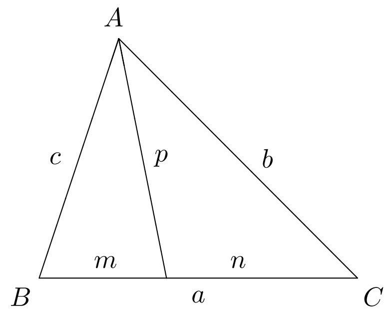
Zadanie 243. Czy istnieje taki sześciokąt, którego wszystkie kąty są równe, ale nie wszystkie boki są równe?

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 244. Dany jest kwadrat $ABCD$ oraz punkt S leżący wewnątrz kwadratu taki, że trójkąt ASB jest równoboczny. Oblicz miarę kąta SDC.

Zadanie 245. W trójkącie ostrokątnym ABC mamy $\measuredangle ACB = 60°$ oraz $\measuredangle CAB = 45°$. Na boku AB obrano punkt D taki, że $|AD| = 1$ oraz $|BD| = 2$. Wykaż, że $\measuredangle BCA = 60°$.

Zadanie 246. Udowodnić, że w dowolnym trójkącie ABC zachodzi następujący związek $a(p + mn) = b^2 m + c^2 n$, gdzie:



Zadanie 247. Wykazać, że długość dwusiecznej kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest równa $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$, gdzie a, b są długościami przyprostokątnych tego trójkąta.

Zadanie 248. W trójkącie ABC wiadomo, że $\measuredangle BAC = 15^\circ$ oraz $\measuredangle BDC = 60^\circ$ (gdzie D leży na boku AB) oraz $|AD| = 2|DB|$. Wyznaczyć miarę kąta ABC.

Zadanie 249. Dany jest trójkąt ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu C na dwusieczne kątów BAC i ABC. Znając długości boków trójkąta ABC obliczyć długość odcinka PQ.

Zadanie 250. Dany jest trójkąt ABC. Niech punkty D, E, F znajdują się na bokach, odpowiednio, BC, CA, AB w takich miejscach, że $|DC| + |CE| = |EA| + |AF| = |FB| + |BD|$. Udowodnić, że:

$$|DE| + |EF| + |FD| \geqslant \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|).$$

Zadanie 251. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o środku ciężkości w punkcie G, wybrano punkt O, który nie jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Prosta OG przecina proste AB, AC, BC odpowiednio w punktach D, E, F. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{|DO|}{|DG|} + \frac{|EO|}{|EG|} + \frac{|FO|}{|FG|}$.

Zadanie 252. W nierównoramiennym trójkącie ABC odcinek CD jest środkową, a CP wysokością położoną wewnątrz kąta ACB. Udowodnij, że jeżeli kąty ACD i PCB są równe, to kąt ACB jest kątem prostym (przyjmij, że $|AC| > |CB|$).

Zadanie 253. Udowodnić, że jeżeli a, b, c oznaczają boki trójkąta, zaś α, β, γ kąty leżące naprzeciw tych boków, to

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{b - a \cdot \cos\gamma}.$$

Zadanie 254. Pokazać, że jeżeli kąty trójkąta ABC: α, β, γ spełniają zależność:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

to trójkąt ten jest prostokątny.

Zadanie 255. Wykazać, że jeśli liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a^3 + b^3 = c^3$, to są one długościami boków trójkąta ostrokątnego.

Zadanie 256. Liczby $a, b, c > 0$ stanowią długości boków trójkąta prostokątnego, które spełniają równanie:

$$(a^n + b^n + c^n)^2 = 2(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}),\ n > 2.$$

Wyznaczyć n.

Zadanie 257. W czworokącie $ABCD$ znane są $|AB| = 6\sqrt{3}$ cm, $|CD| = 12$ cm, $\measuredangle BAD = 60^\circ, \measuredangle ABC = 150^\circ, \measuredangle CDA = 90^\circ$. Znaleźć długości boków $|BC|$ oraz $|AD|$.

Zadanie 258. W czworokącie $ABCD$ dane są punkty K, L, M, N, odpowiednio na bokach AB, BC, CD, AD takie, że $|AK| = |KB|, |BL| = |LC|, |CM| = |MD|, |DN| = |NA|$. Udowodnij, że odcinki KM oraz LN dzielą się na połowy.

Zadanie 259. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że kąt wewnętrzny przy wierzchołku B ma miarę 100°, kąt wewnętrzny przy wierzchołku D ma miarę 130°. Znaleźć $|BD|$, jeśli wiadomo, że $|AB| = |BC| = 1$.

Zadanie 260. W trapezie $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P pod kątem prostym. Udowodnij, że:

$$(|AP| + |PC|)^2 + (|BP| + |PD|)^2 = (|AB| + |CD|)^2.$$

Zadanie 261. Boki danego $12k + 6$ - kąta mają długości:

$$a_i = \sqrt{1+i^2}, \text{ gdzie } i \in \{1, 2, 3, \ldots, 12k+6\}.$$

Rozstrzygnij, czy istnieje kartezjański układ współrzędnych, w którym wszystkie jego wierzchołki mają współrzędne całkowite.

0.8 Okrąg wpisany i opisany, własności stycznej

Okrąg odgrywa ważną rolę w konfiguracjach geometrycznych z uwagi na subtelne połączenie definicji związanej z odległością (zbiór punktów równoodległych od danego) i własności związanych z kątami, zwłaszcza dzięki twierdzeniu o kącie wpisanym i środkowym. Z okręgiem wiąże się także istotne pojęcie stycznej i tzw. najmocniejsze twierdzenie geometrii elementarnej o równości długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu poza okręgiem. Fakty te prowadzą do istotnych wniosków związanych z miejscami geometrycznymi środków okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie oraz do kryteriów wpisywalności i opisywalności okręgów na czworokątach, i innych wielokątach. Bardziej zaawansowany materiał obejmuje też twierdzenia o stycznej i siecznej oraz o potędze punktu względem okręgu.

Zadania testowe

Zadanie 262. Kulę ziemską opasujemy nad równikiem linką dłuższą o równika o 1 m. Na jakiej wysokości nad powierzchnią ziemi znajduje się linka.

(A) około 1 cm

(B) około 10 cm

(C) około 16 cm

(D) około 20 cm

Zadanie 263. Na okręgu wybrano 7 punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Punkty są wybrane tak, by żadne trzy cięciwy nie przecięły się w jednym punkcie. Na ile cześci cięciwy te dzielą koło?

(A) 128,

(B) 64,

(C) 63,

(D) 49.

Zadanie 264. Dane są dwa okręgi o wspólnym środku i różnych promieniach. Jeżeli znamy długość cięciwy większego okręgu stycznej do mniejszego okręgu, to możemy obliczyć:

(A) pole pierścienia kołowego utworzonego przez te okręgi,

(B) pole koła o promieniu równym promieniowi mniejszego okręgu,

(C) promień większego okręgu,

(D) na podstawie tej informacji nie można obliczyć żadnej z wielkości z wymienionych w podpunktach (A), (B), (C).

Zadanie 265. Prawdziwe jest zdanie: „Istnieje trójkąt, w którym:

(A) dwusieczne przecinają się w punkcie należącym do jednego z boków trójkąta.”

(B) środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem jednego z boków.”

(C) środek okręgu wpisanego w trójkąt należy do symetralnej jednego z boków.”

(D) okrąg opisany i okrąg wpisany w ten trójkąt są okręgami współśrodkowymi.”

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 266. Dwie równoległe cięciwy okręgu o promieniu $R = 13$ mają długość 10 i 16. Oblicz odległość między nimi.

Zadanie 267. Dane są dwa okręgi o promieniach r_1, r_2 styczne zewnętrznie. Wyznacz długość promienia okręgu stycznego do danych okręgów i do ich wspólnej stycznej.

Zadanie 268. W trójkąt o bokach $6, 8, 12$ wpisano okrąg. Czy promień tego okręgu ma długość 2?

Zadanie 269. W trójkąt równoramienny ABC o podstawie długości 12 cm wpisano okrąg, a następnie poprowadzono trzy styczne do tego okręgu tak, że odcinają one od danego trójkąta trzy małe trójkąty. Suma obwodów tych trójkątów wynosi 48 cm. Wyznacz długości ramion trójkąta ABC.

Zadanie 270. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem i niech K, L, M dzielą kolejno odcinki AB, BC, CA na równe części. Obliczyć stosunek długości promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC i KLM.

Zadanie 271. W trójkąt o wysokościach h_1, h_2, h_3, wpisano okrąg o promieniu r. Wykazać, że:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}.$$

Zadanie 272. Boki prostokąta mają długości 10 i 24. W każdy trójkąt, na który przekątna dzieli ten prostokąt, wpisano okrąg. Oblicz odległość środków tych okręgów.

Zadanie 273. W rombie $ABCD$ kąt przy wierzchołku A ma miarę $60°$. Okrąg przechodzący przez środek rombu i styczny do prostej AD w punkcie A przecina bok BC w punkcie E. Wyznacz stosunek $\frac{|EC|}{|BE|}$.

Zadanie 274. Na okręgu opisano trapez równoramienny, w którym suma długości podstaw jest czterokrotnie większa od średnicy okręgu. Wykaż, że kąt ostry tego trapezu ma miarę $30°$.

Zadanie 275. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P.

Zadanie 276. Dany jest wielokąt foremny $A_1A_2 \dots A_{16}$. P jest dowolnym punktem okręgu opisanego na wielokącie $A_1A_2 \dots A_{16}$. Wykaż, że suma $|A_1P|^2 + |A_2P|^2 + \dots + |A_{16}P|^2$ nie zależy od położenia punktu P na tym okręgu.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 277. Znając kąty α, β trójkąta ABC wpisanego w okrąg, wyznaczyć kąt między prostą AB i styczną do okręgu w punkcie C.

Zadanie 278. Odległości środka okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym od boków tego trójkąta wynoszą odpowiednio x, y, z. Udowodnić, że: $x+y+z = R+r$.

Zadanie 279. Punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AF przecina bok BC w punkcie D. Dowieść, że:

$$(|AF| + |CD| = |AC|) \Leftrightarrow (\beta = \pi/3 + \gamma/3).$$

Zadanie 280. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Niech I, J będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD. Okrąg opisany na trójkącie IJD przecina prostą AB po raz drugi w punkcie S. Wykazać, że $|BC| + |AS| = |AC| + |BS|$.

Zadanie 281. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego o wierzchołku C przecina przeciwprostokątną w punkcie D. Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek CD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu C. Wyznaczyć miary kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 282. Dwa okręgi o różnych promieniach R i r są styczne zewnętrznie w punkcie S. W większym okręgu poprowadzono średnicę AB z punktów A, B poprowadzono styczne do mniejszego okręgu odpowiednio w punktach C i D. Wykaż, że liczba $|AC|^2 + |BD|^2$ nie zależy od wyboru średnicy AB.

Zadanie 283. Dane są rozłączne okręgi O_1 i O_2 o środkach odpowiednio S i T. Punkt E jest najbardziej oddalonym od okręgu O_2 punktem okręgu O_1, zaś punkt F jest najbardziej oddalonym od okręgu O_1 punktem okręgu O_2. Z punktu E prowadzimy proste styczne do okręgu O_2. Okrąg O_3 jest styczny wewnętrznie do okręgu O_1 i tych prostych. Analogicznie z punktu F prowadzimy proste styczne do okręgu O_1. Okrąg O_4 jest styczny wewnętrznie do okręgu O_2 i tych prostych. Udowodnij, że okręgi O_3 i O_4 są przystające.

Zadanie 284. (2002.E10) Dwa okręgi o promieniach odpowiednio równych: r, R, gdzie $R > r$, są styczne wewnętrznie do prostej l w punkcie A. Prosta k, równoległa do prostej l, przecina okręgi w punktach B, C znajdujących się po jednej stronie prostej zawierającej środki tych okręgów. Znaleźć promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

0.9 Pole

Pole jest jednym z tych niebanalnych pojęć w geometrii, które wbrew intuicji wymaga delikatnych zabiegów przy określaniu jego natury. Dotyczy to zwłaszcza pól ograniczonych przez krzywe takie jak okrąg, parabola itd. W poniższych zadaniach posługujemy się intuicyjnymi własnościami pola oraz kilkoma znanymi formułami na pole trójkąta, czworokąta czy wielokąta. Do podstawowych metod należą operacje dzielenia figury na mniejsze (trójkąty, czworokąty) i porównywanie ich.

Zadania testowe

Zadanie 285. Każdy bok kwadratu powiększono o 20%. Wynika z tego, że pole tego kwadratu zwiększyło się o:

(A) 20%,

(B) 40%,

(C) 24%,

(D) 44%.

Zadanie 286. Długości boków równoległoboku zmniejszono o 30%, a wysokość równoległoboku zwiększono o 30%. Jak zmieniło się pole równoległoboku?

(A) Nie zmieniło się.

(B) Zmalało o 91%.

(C) Zmalało o 9%.

(D) Wzrosło o 9%.

Zadanie 287. W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 8 cm i przecinają się pod kątem 45°. Pole tego prostokąta ma miarę:

(A) $32\sqrt{2}$ cm^2,

(B) 32 cm^2,

(C) $16\sqrt{2}$ cm^2,

(D) równą polu deltoidu, którego przekątne mają długości 8 cm i $4\sqrt{2}$ cm.

Zadanie 288. W koło o promieniu 8 cm wpisano trójkąt równoboczny, a następnie na kole opisano kwadrat w ten sposób, że jeden z boków kwadratu jest równoległy do jednego z boków trójkąta. Pole figury zawartej między brzegami tych wielokątów jest równe:

(A) $(256 - 36\sqrt{3})$ cm^2,

(B) $16(16 - 3\sqrt{3})$ cm^2,

(C) $2^4(4^2 - \sqrt{27})$ cm^2,

(D) $(2^8 - 48\sqrt{3})$ cm^2.

Zadanie 289. Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez okręgi o promieniach $r = 12,5$ cm oraz $R = 13,5$ cm wynosi:

(A) 12π cm^2,

(B) π cm^2,

(C) 1 cm^2,

(D) 26π cm^2.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 290. Rozstrzygnij, czy istnieje trójkąt o polu równym 1000 i każdej wysokości mniejszej od 1.

Zadanie 291. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt P, którego odległości od poszczególnych wierzchołków wynoszą $5, 12, 13$. Oblicz pole trójkąta ABC.

Zadanie 292. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg o promieniu $r = 1$. Punkt styczności przeciwprostokątnej z okręgiem dzieli tę przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 i 3. Obliczyć pole tego trójkąta.

Zadanie 293. W trójkącie ABC środkowe AD i CE tworzą z bokiem AC kąty, których suma wynosi $60°$. Wiedząc, że $|AD| \cdot |CE| = \sqrt{3}$, obliczyć pole tego trójkąta.

Zadanie 294. Niech dany będzie trójkąt równoboczny ABC i okrąg O, o środku w punkcie przecięcia się wysokości trójkąta ABC, który dzieli każdy z jego boków na trzy równe odcinki. Obliczyć obwód i pole figury, która powstaje po usunięciu z koła wyznaczonego przez okrąg O obszaru należącego do wnętrza trójkąta ABC.

Zadanie 295. Przez punkt leżący wewnątrz trójkąta poprowadzono trzy proste równoległe do boków trójkąta. Proste te dzielą trójkąt na trzy trójkąty o polach P_1, P_2, P_3 i trzy równoległoboki o polach S_1, S_2, S_3. Wyrazić pola powierzchni otrzymanych trójkątów w zależności od pól powierzchni równoległoboków.

Zadanie 296. W danym kwadracie $ABCD$ o boku długości 6, w którym przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, poprowadzono odcinek AE, gdzie E jest środkiem boku DC kwadratu $ABCD$. Wiedząc, że punkt M stanowi punkt przecięcia odcinka AE z przekątną BD, wyznacz pole trójkąta AMO oraz pole czworokąta $CEMO$.

Zadanie 297. Oblicz pole trapezu o podstawach długości 16 i 44 oraz ramionach długości 25 oraz 17.

Zadanie 298. Przekątne czworokąta wypukłego są prostopadłe i dzielą go na cztery trójkąty, z których trzy mają pola: $2, 4, 6$. Jakie pole ma czwarty z tych trójkątów?

Zadanie 299. Znajdź pole trapezu równoramiennego, którego ramię ma długość 5, jedna z podstaw ma długość dwa razy większą od drugiej, a przekątna dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy.

Zadanie 300. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przez środek przekątnej BD poprowadzono prostą równoległą do drugiej przekątnej AC. Ta prosta przecina bok AD w punkcie E. Udowodnić, że odcinek CE dzieli czworokąt $ABCD$ na części o równych polach.

Zadanie 301. Pięciokąt $ABCDE$ spełnia warunki $AB||CE$ i $BC||AD$. Uzasadnij, że pola trójkątów ABE oraz BCD są równe.

Zadanie 302. Pole trójkąta ABC jest równe S. Każdy bok tego trójkąta podzielono na trzy części w stosunku $m : n : m$. Obliczyć pole sześciokąta, którego wierzchołkami sa punkty podziału.

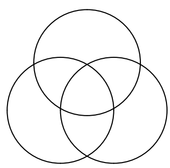
Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 303. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, gdzie przeciwprostokątna wynosi 4, a suma przyprostokątnych $\sqrt{18}$.

Zadanie 304. Wykazać, że dwa trójkąty prostokątne o równych polach i równych obwodach są do siebie przystające.

Zadanie 305. Dany jest trójkąt, którego długości boków są liczbami pierwszymi. Rozstrzygnij, czy pole tego trójkąta może być liczbą całkowitą.

Zadanie 306. Udowodnij, że jeżeli trzy koła S_1, S_2, S_3 o równych promieniach i środkach odpowiednio w punktach O_1, O_2, O_3 przecinają się tak, jak na rysunku, to pole figury $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ jest większe od 1/6 pola jednego z tych kół.



Zadanie 307. Punkt przecięcia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny z przeciwprostokątną tego trójkąta dzieli ją na dwa odcinki o długościach m i n. Udowodnij, że pole trójkąta jest równe iloczynowi długości tych odcinków.

Zadanie 308. W kwadracie o boku długości 1 obcięto rogi, tak, że powstał ośmiokąt foremny. Oblicz pole i obwód tego ośmiokąta.

Zadanie 309. W trapezie, długości podstaw wynoszą 4 cm i 9 cm, zaś jego przekątne wynoszą 5 cm i 12 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 310. Pola trójkątów utworzonych przez przekątne trapezu i podstawy wynoszą odpowiednio S_1, S_2. Wyznaczyć pole powierzchni trapezu.

Zadanie 311. Znaleźć pole powierzchni trapezu równoramiennego o wysokości h wiedząc, że ramię trapezu widać ze środka okręgu na nim opisanego pod kątem α.

Zadanie 312. Udowodnić, że stosunek pola czworokąta utworzonego przez przecięcia dwusiecznych kątów równoległoboku do pola tego równoległoboku nie zależy od kątów równoległoboku.

Zadanie 313. Przez dowolny punkt wewnętrzny trójkąta ABC poprowadzono trzy proste, odpowiednio równoległe do boków tego trójkąta. Proste te dzielą pole trójkąta ABC na sześć części, z których trzy, to trójkąty o polach S_1, S_2, S_3. Obliczyć pole trójkąta ABC.

Zadanie 314. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przez środek przekątnej BD poprowadzono prostą równoległą do drugiej przekątnej AC. Ta prosta przecina bok AD w punkcie E. Udowodnić, że odcinek CE dzieli czworokąt $ABCD$ na części o równych polach.

Zadanie 315. W trapezie $ABCD$ (gdzie $AB||CD$) dwusieczna kąta wewnętrznego ABC jest prostopadła do ramienia AD trapezu i ma z tym ramieniem punkt wspólny P. Punkt ten dzieli ramię AD w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka A. Oblicz stosunek pola trójkąta ABP do pola czworokąta $PBCD$.

Zadanie 316. Na dwóch kolejnych bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ takich, że $|AB| = 8$ i $|BC| = 6$ obrano odpowiednio punkty E i F w ten sposób, że półprosta DE jest dwusieczną kąta ADB, zaś półprosta DF jest dwusieczną kąta BDC. Oblicz pole czworokąta $BEDF$.

Zadanie 317. Boki AB, BC, CA trójkąta ABC podzielono odpowiednio punktami M, N, P tak, że $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{1}{4}$. Znajdź stosunek pola powierzchni trójkąta ograniczonego prostymi AN, BP i CM do pola trójkąta ABC.

Zadanie 318. Pole trójkąta ABC wynosi S. Każdy bok trójkąta podzielono w stosunku $m : n : m$. Oblicz pole sześciokąta, którego wierzchołkami są punkty podziału boków.

0.10 Stereometria

Jeden z trudniejszych działów geometrii mimo licznych intuicji wyniesionych ze szkoły. Trudnością jest zwłaszcza umiejętność rozeznania pośród konfiguracji pomiędzy prostymi w przestrzeni oraz zdolność do właściwego szkicowania przekrojów. Rozdział ten sprawdza podstawową wiedzę związaną ze związkami miarowymi brył w przestrzeni, a więc długościami krawędzi, polem powierzchni i objętością.

Zadania testowe

Zadanie 319. Pole przekroju sześcianu o krawędzi $a = 2$ płaszczyzną może być równe:

(A) 4,

(B) $4\sqrt{2}$,

(C) $4\sqrt{3}$,

(D) 6.

Zadanie 320. Jeśli stożek ma wysokość 5 cm, a kąt rozwarcia tego stożka jest prosty, to:

(A) pole podstawy stożka jest równe 25π cm^2,

(B) objętość stożka wynosi 125π cm^3,

(C) kąt nachylenia tworzącej stożka do postawy jest połową kąta prostego,

(D) pole powierzchni bocznej stożka stanowi $\frac{1}{4}$ pola koła o promieniu $5\sqrt{2}$.

Zadanie 321. Z jednego wierzchołka sześcianu poprowadzono przekątne dwóch ścian bocznych. Miara kąta między tymi przekątnymi wynosi:

(A) $90°$,

(B) $45°$,

(C) $60°$,

(D) $120°$.

Zadanie 322. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 8 cm. Jedna z krawędzi bocznych o długości 6 cm jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe:

(A) $1,28$ dm^2,

(B) $8(11+\sqrt{41})$ cm^2

(C) $4(\sqrt{164}+22)$ cm^2,

(D) $12,8$ dm^2.

Zadanie 323. Objętość prostopadłościanu wynosi V. Wówczas iloczyn pól trzech ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równy:

(A) $\sqrt{V}$,

(B) V,

(C) V^2,

(D) $2V^2$.

Zadanie 324. Liczba wierzchołków stanowi $\frac{2}{3}$ liczby krawędzi w graniastosłupie:

(A) czworokątnym,

(B) żadnym,

(C) trójkątnym,

(D) każdym.

Zadanie 325. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa:

(A) 2^{100},

(B) 3^{100},

(C) 5^{100},

(D) 1000001.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 326. Udowodnić, że jeżeli obwody ścian czworościanu są równe, to ściany są trójkątami przystającymi.

Zadanie 327. Dana jest metalowa kula o promieniu R, którą przetopiono na 1999 małych kulek o promieniu r. Oblicz stosunek pola powierzchni dużej kuli do sumy pól powierzchni 1999 małych kulek.

Zadanie 328. W kulę o promieniu $\sqrt{3}$ wpisano sześcian. Następnie w jedną ze ścian wpisano koło. Na przeciwległej ścianie wybrano punkt P. Tak powstał stożek o podstawie będącej kołem o wierzchołku w punkcie P. Oblicz jego objętość.

Zadanie 329. W wielościan wpisano kulę o promieniu R. Wykaż, że objętość tego wielościanu wyraża się wzorem $V = \frac{1}{3}P_c \cdot R$, gdzie P_c oznacza pole powierzchni całkowitej wielościanu.

Zadanie 330. Objętość i pole powierzchni całkowitej walca wyraża ta sama liczba dodatnia. Jaka jest długość promienia podstawy i wysokość tego walca, jeżeli wiadomo, że są one liczbami całkowitymi?

Zadanie 331. Wszystkie krawędzie czworościanu są styczne do pewnej kuli. Wykazać, że sumy długości przeciwległych krawędzi tego czworościanu są równe.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 332. Oblicz odległość punktu przecięcia się wysokości czworościanu foremnego o boku $\sqrt{6}$ od jego ścian.

Zadanie 333. Wybrano cztery wierzchołki sześcianu o krawędzi długości a, tak, że po połączeniu utworzyły one czworościan foremny. Powierzchnia tego czworościanu dzieli sześcian na 5 brył. Oblicz ich pole i objętość.

Zadanie 334. W czworościanie $ABCD$ kąty płaskie przy wierzchołku A wynoszą po $90°$. Udowodnić, że jeśli $|AB| = |AC| + |AD|$, to suma kątów płaskich przy wierzchołku B wynosi $90°$.

Zadanie 335. Czworościan foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy obwód tego czworokąta?

Zadanie 336. Do naczynia w kształcie półkuli o danym promieniu R włożono 4 równe kule. Okazało się, że płaska pokrywa naczynia jest styczna do każdej z tych kul. Obliczyć długość promienia kul umieszczonych w naczyniu.

0.11 Konfiguracje geometryczne

Przez konfigurację geometryczną rozumieć można dowolny układ obiektów na płaszczyźnie czy w przestrzeni. Wprowadzając jednak pewne ograniczenia albo żądając niezmienniczości ze względu na pewne operacje (na przykład: posiadanie osi symetrii) początkowa dowolność konfiguracji ulega usztywnieniu. Dowolny czworokąt możne stać się prostokątem, a dowolna izometria - obrotem albo przesunięciem. Szczególnie istotne są konfiguracje związane z leżeniem trzech punktów na jednej prostej oraz z przechodzeniem trzech prostych przez jeden punkt. Rozwiązania zadań wymagają czasem pomysłowości, dorysowania brakującego elementu konfiguracji, albo przeniesienia pewnych jej elementów w inne miejsce.

Zadania testowe

Zadanie 337. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że czworokąt ten jest:
(A) prostokątem,
(B) równoległobokiem,
(C) rombem,
(D) kwadratem.

Zadanie 338. Oceń czy zdanie jest prawdziwe:
(A) w każdym równoległoboku jeden z kątów jest ostry,
(B) w każdym trapezie przekątne są równej długości,
(C) średnica okręgu wpisanego w trójkąt jest większa od długości jego boku,
(D) każdy prostokąt ma dokładnie dwie osie symetrii.

Zadanie 339. Które zdanie jest prawdziwe?
(A) Jedyną osią symetrii odcinka jest jego symetralna.
(B) Dowolny okrąg i dowolny punkt mają tyle samo osi symetrii.
(C) Każde dwa punkty są symetryczne względem prostej.
(D) Każdy wielokąt foremny ma nieskończenie wiele osi symetrii.

Zadanie 340. Każda izometria przekształca
(A) prostą na prostą doń równoległą,
(B) parę prostych prostopadłych na parę prostych prostopadłych,
(C) koło na koło o tym samym promieniu,
(D) każdą figurę i figurę przystającą do niej.

Zadanie 341. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub na zielono. Wynika z tego, że:

(A) pewne trzy boki są tego samego koloru,

(B) pewne dwie przekątne są różnych kolorów,

(C) z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru,

(D) istnieje przynajmniej jeden trójkąt zielony i przynajmniej jeden czerwony.

Zadanie 342. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $|AB| = 15$ i $|DC| = 6$. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie O. Stąd wynika, że:

(A) Trójkąt AOB jest obrazem DOC w jednokładności o środku O i skali $\frac{5}{2}$.

(B) Trójkąty BOC i AOD są podobne.

(C) Trójkąt ACD jest obrazem trójkąta BCD w jednokładności o środku O.

(D) Trójkąty BOC i AOD mają równe pola.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 343. Wykaż, że jeżeli na każdym z boków równoległoboku zbudujemy kwadrat (na zewnątrz równoległoboku), to punkty przecięcia przekątnych tych kwadratów są także wierzchołkami pewnego kwadratu.

Zadanie 344. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne BKC i CDL leżące na zewnątrz równoległoboku. Wykaż, że trójkąt AKL jest równoboczny.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 345. Z dowolnego punktu D, leżącego na boku BC trójkąta ABC, poprowadzono proste przecinające boki AC i AB w punktach E i F. Znaleźć geometryczne położenie punktów przecięcia okręgów opisanych na trójkątach CDE i BDF.

Zadanie 346. Równoległobok przecięto dwoma układami prostych, równoległych do jego boków: każdy z tych układów składa się z m prostych. Ile jest wszystkich możliwych równoległoboków, które można utworzyć przy pomocy tych układów linii prostych oraz boków równoległoboku?

Zadanie 347. Wykaż, że jeśli na każdym z boków równoległoboku zbudujemy kwadrat (na zewnątrz równoległoboku), to punkty przecięcia przekątnych tych kwadratów są także wierzchołkami pewnego kwadratu.

Zadanie 348. Wewnątrz kąta wypukłego $\measuredangle AOB$ znajduje się punkt P. Wyznacz na ramionach OA i OB takie punkty R i S, dla których obwód trójkąta PRS jest najmniejszy.

Zadanie 349. Na płaszczyźnie jest 3000 prostych, przy czym żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w tym samym punkcie. Proste te dokonują podziału płaszczyzny na części. Udowodnić, że wśród tych części jest przynajmniej 2000 trójkątów.

Zadanie 350. Udowodnić, że n prostych leżących na płaszczyźnie takich, że każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ części.

Zadanie 351. Udowodnij, że jeżeli X jest punktem okręgu opisanego na trójkącie ABC, K jest jego rzutem na prostą l_{BC}, L jego rzutem na prostą l_{CA}, a M jego rzutem na prostą l_{AB}, to punkty K, L, M leżą na jednej prostej.

Zadanie 352. Pokaż, że ortocentrum N, punkt przecięcia środkowych S i środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

Zadanie 353. Obraz środkowej trójkąta w symetrii względem dwusiecznej wychodzącej z tego samego wierzchołka nazywamy symedianą. Wykazać, że trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazywanym punktem Lemoine'a).

0.12 Nierówności geometryczne

Najważniejszą nierównością geometryczną jest nierówność trójkąta. Z niej wywieźć można szereg eleganckich rezultatów wiążących miary figur na płaszczyźnie i w przestrzeni. W wielu zadaniach wykorzystuje się również metody algebraiczne znane z jednego z poprzednich rozdziałów, zwłaszcza nierówności między średnimi. Także własności funkcji trygonometrycznych i umiejętne stosowanie twierdzeń sinusów i cosinusów prowadzą do użytecznych obserwacji. Jedną z nich jest ważna nierówność Ptolemeusza dla czworokątów (i istotne jej kryterium równości!).

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 354. Wykazać, że w każdym czworokącie wypukłym suma przekątnych jest większa od połowy obwodu czworokąta i mniejsza od obwodu tego czworokąta.

Zadanie 355. Niech h_1, h_2, h_3 będą długościami wysokości danego trójkąta ABC, w który wpisano okrąg o promieniu r. Dowieść, że zachodzi nierówność: $h_1 + h_2 + h_3 \geqslant 9r$.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 356. Udowodnij, że w każdym trójkącie zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4r^2},$$

gdzie r - promień okręgu wpisanego w trójkąt, a, b, c - boki trójkąta.

Zadanie 357. Niech a, b będą długościami boków równoległoboku, zaś p, q – długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geqslant pq$.

Zadanie 358. Wykaż, że suma wysokości trójkąta jest co najmniej 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 359. Wykaż, że w każdym trójkącie prawdziwa jest nierówność $m_a \cdot m_b \cdot m_c \geqslant p \cdot S$, gdzie m_a, m_b, m_c - długości odpowiednich środkowych, p - połowa obwodu zaś S - pole trójkąta.

Zadanie 360. Przez środek okręgu wpisanego w trójkąt o promieniu r poprowadzono proste równoległe do boków trójkąta. Udowodnić, że suma kwadratów długości odcinków tych prostych, zawartych wewnątrz tego trójkąta jest niemniejsza niż $16r^2$.

Zadanie 361. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu wewnętrznego czworokąta wypukłego od jego wierzchołków. Wykaż, że $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geqslant 2\sqrt{2S}$, gdzie S to pole czworokata.

Zadanie 362. Udowodnić, że w trójkącie prostokątnym zachodzi nierówność $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, gdzie: R - promień okręgu opisanego na trójkącie, r - promień okręgu wpisanego w trójkąt, S - pole trójkąta.

Zadanie 363. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną kąta ACB, przecinającą bok AB w punkcie D. Wykazać, że $|CD| < \sqrt{|AC| \cdot |BC|}$.

Zadanie 364. Udowodnij, że dla dowolnego trójkąta zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4r^2},$$

gdzie r - promień okręgu wpisanego w trójkąt, a, b, c - boki trójkąta.

Zadanie 365. Dwusieczna kąta $\measuredangle BAC$ trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D (różnym od A). Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B, C na prostą AD. Udowodnij, że:

$$|AD| \geqslant |BK| + |CL|.$$

Zadanie 366. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Zadanie 367. Łamana zamknięta ma długość I i złożona jest z odcinków długości $a_1, \ldots, a_n$. Pokazać, że:

$$\frac{a_1}{I-a_1} + \frac{a_2}{I-a_2} + \ldots + \frac{a_k}{I-a_k} < 2.$$

0.13 Wielomiany

Wielomiany poznajemy w szkole poprzez przykładowe klasy: dwumiany liniowe, trójmiany kwadratowe i inne, głównie w kontekście operacji algebraicznych pochodzących od wzorów skróconego mnożenia oraz poprzez stowarzyszone z nimi funkcje. Zastosowania wielomianów stają się zrozumiałe dopiero w przy użyciu bardziej zaawansowanego języka matematyki. Niemniej jednak równania wielomianowe fascynowały ludzi od wieków i dały kilka bardzo ważnych impulsów dla rozwoju matematyki. W tym rozdziale sprawdzana jest znajomość podstawowych własności algebraicznych wielomianów i ich funkcji, między innymi twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą, twierdzenia Bezout, a także pewnych szczególnych własności wielomianów o współczynnikach całkowitych i wymiernych.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 368. Przedstaw wielomian $W(x) = x^8+x^4+1$ w postaci iloczynu czterech wielomianów stopnia drugiego.

Zadanie 369. Wyznacz liczbę równań postaci $x^2 - px - q = 0$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, których rozwiązania są mniejsze niż 3.

Zadanie 370. Pewien wielomian daje po podzieleniu przez $x - 1$ resztę 2, a po podzieleniu przez $x - 2$ resztę 1. Jaka będzie reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)$?

Zadanie 371. Znaleźć współczynnik stojący przy x^3 w równaniu:

$$(1 + x)^3 + (1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \ldots + (1 + x)^{15}.$$

Zadanie 372. Wyznacz sumę pierwiastków wielomianu:

$$W(x) = x^5 + 2\frac{1}{12}x^4 - 23\frac{1}{3}x^3 - 62\frac{11}{12}x^2 + 6\frac{1}{2}x + 3.$$

Zadanie 373. Dana jest rodzina funkcji kwadratowych $f(x) = ax^2 + bx + c$ spełniających warunki: dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$. Jaką najmniejszą wartość może przyjmować wyrażenie: $(a + b + c)/(b - a)$?

Zadanie 374. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia: $(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)+9$.

Zadanie 375. Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia: $x^{1999}+\frac{1999}{x}$ w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

Zadanie 376. Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt{x^2+10x+25}+\sqrt{x^2+12x+36}\leqslant 4-x.$$

Zadanie 377. Rozwiązać nierówność:

$$16x^5-20x^3+5x-1<0.$$

Zadanie 378. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ takie, że:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}(xP(x-1)=(x-2)P(x)).$$

Zadanie 379. Udowodnić, że równania kwadratowe $x^2+p_1x+q_1=0$ i $x^2+p_2x+q_2=0$ mają wspólne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(q_2-q_1)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)=0.$$

Zadanie 380. Wykazać, że jeżeli liczba $\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach wymiernych, to również liczba $-\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Zadanie 381. Udowodnić, że jeśli $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$, przy $|x|\leqslant 1$, to $|cx^2+bx+a|\leqslant 2$ przy $|x|\leqslant 1$.

Zadanie 382. Czy istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki: $P(7)=11$ i $P(11)=13$?

Zadanie 383. Wielomian $w(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ przyjmuje wartości całkowite dla $x=-1,0,1,2$. Udowodnić, że wielomian ten przyjmuje całkowite wartości dla wszystkich x całkowitych.

Zadanie 384. Wykazać, że jeśli $a\neq 0$ i równanie $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ma dwa różne rozwiązania, z których jedno jest odwrotnością drugiego to $a^2-d^2=ac-bd$.

0.14 Ciągi

Poniższy dział przynależący w całości do szkół ponadpodstawowych sprawdza podstawową wiedzę o postaciach: ogólnej i rekurencyjnej ciągu a także znajomość dwóch najważniejszych klas ciągów rozważanych w szkole: arytmetycznego i geometrycznego.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 385. Wykazać, że do zbioru wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi \cdot n(n^6-1)}{14}\right)$$

nie należy 1.

Zadanie 386. Podać wzór na n - ty wyraz ciągu: $1, 22, 333, 4444, \ldots$

Zadanie 387. Czy liczby $\sqrt{2}, 2, \sqrt{3}$ mogą tworzyć ciąg arytmetyczny?

Zadanie 388. Sprawdź czy liczby $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ mogą być wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 389. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_{n_2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

Zadanie 390. Obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu:

$$2, 22, 222, 2222, \ldots$$

Zadanie 391. Podaj przykład ciągu nieskończonego arytmetycznego, z którego nie można wybrać trzech wyrazów tworzących ciąg geometryczny.

Zadanie 392. Udowodnić, że jeżeli liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ tworzą ciąg arytmetyczny i żadna z nich nie jest zerem, to:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}.$$

Zadanie 393. Dla każdej pary liczb naturalnych n, k wyznacz wszystkie ciągi $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ liczb nieujemnych, spełniających układ równań:

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = 1 \\ (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) = 2 \end{cases}$$

Zadanie 394. Niech S_k oznacza sumę pierwszych k wyrazów ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że:

$$S_2 + \frac{1}{3}S_6 + \frac{1}{5}S_{10} + \ldots + \frac{1}{2n-1}S_{4n-2} = S_{2n}.$$

0.15 Funkcje

Jedno z pojęć abstrakcyjnych szczególnie obecnych w zastosowaniach poznajemy w szkole głównie przez badanie przykładowych klas: funkcji liniowych, kwadratowych, wielomianowych, trygonometrycznych itd. Część poniższych zadań sprawdza znajomość własności tychże klas, łącznie z zastosowaniami rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności. Pojawia się także kilka bardziej zaawansowanych zadań przynależących do dziedziny równań funkcyjnych, gdzie szukamy wszystkich funkcji opisanych pewnymi własnościami - a nie jedynie badamy jakieś szczególne ich przykłady. Jest to zjawisko wybitnie matematyczne, mające jednakże zastosowania np. poprzez dziedzinę tzw. równań różniczkowych.

Zadania testowe

Zadanie 395. Małgosia narysowała w układzie współrzędnych wykres funkcji liniowej. Funkcja ta mogła mieć:
(A) dokładnie jedno miejsce zerowe,
(B) nieskończenie wiele miejsc zerowych,
(C) dokładnie dwa miejsca zerowe,
(D) zero miejsc zerowych.

Zadanie 396. Liczba $(-\sqrt{3})$ jest miejscem zerowym funkcji:
(A) $y = -3\sqrt{3}x + 9$,
(B) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1$,
(C) $y = -9 - \sqrt{27}x$,
(D) $y = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}x}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 397. Wykresem funkcji liniowej jest prosta przechodząca przez punkt $Q = (10, -3)$ i równoległa do osi OX. Stąd wynika, że:
(A) Funkcja jest rosnąca.
(B) Wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.
(C) Zbiór wartości funkcji jest jednoelementowy.
(D) Miejscem zerowym funkcji jest 10.

Zadanie 398. Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej $f(x)$ jest równy -3

i punkt $P = (0, 1)$ należy do tego wykresu, to:

(A) Funkcja f jest malejąca,

(B) Punkt $(-2, 7)$ należy do wykresu funkcji f,

(C) Prosta $x + 3y - 12 = 0$ jest równoległa do wykresu funkcji f,

(D) Miejscem zerowym funkcji jest $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 399. Naszkicuj wykres funkcji $y = \max(7 - x; 2x + 1)$, jeśli symbol $max(a; b)$ równy jest:

$$\begin{cases} a, & \text{gdy } a \geqslant b, \\ b, & \text{gdy } a < b \end{cases}.$$

Zadanie 400. Narysuj wykres funkcji $f(x) = |[x]+1|$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Zadanie 401. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \frac{5x + 10 + p}{x + 2},$$

gdzie p jest liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie liczby całkowite x, dla których funkcja przyjmuje wartości całkowite.

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 402. Wyznacz wartości funkcji $f(f(f(f(f(f(1999))))))$, gdy $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Zadanie 403. Wyznaczyć wartość funkcji:

$$f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

dla $x > 0$ nie korzystając z rachunku pochodnych.

Zadanie 404. Dana jest funkcja $y = r \cdot \sin(\pi \cdot x)$, gdzie r jest pierwiastkiem równania:

$$\frac{r-1}{|r|} + \frac{r-2}{|r|} + \frac{r-3}{|r|} + \ldots + \frac{1}{|r|} = r^3 - 4r^2 - 23.$$

Obliczyć ile miejsc zerowych będzie ona miała na przedziale $x \in [0; 14)$.

Zadanie 405. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 + x^2 + 2002x + \frac{1}{x^{2007}}$ dla $x > 0$.

Zadanie 406. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie:

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

Zadanie 407. Znaleźć wzór funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeśli wiadomo, że jest funkcją parzystą i dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2) + 1.$$

Zadanie 408. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji:

$$y = a\cos x + b\sin x.$$

Zadanie 409. Znaleźć wzór funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli f jest funkcją parzystą i dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2) + 1.$$

Zadanie 410. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $w(x)$:

$$w(x) = x^{2007} + \frac{2007}{x}, \text{ jeśli wiadomo, że } x > 0.$$

Zadanie 411. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$ wiedząc, że $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 412. Wyznacz największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = |x| \cdot |x - 1| \cdot |x - 2| \cdot |x - 3| \cdot |x - 4| \cdot |x - 5| \cdot |x - 6| \cdot |x - 7|.$$

Zadanie 413. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki: $f(0) = 0$ oraz $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, dla $x \neq 0$. Wykazać, że funkcja f jest parzysta i wyznaczyć zbiór jej wartości.

Zadanie 414. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające następujące równanie:

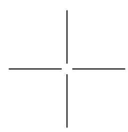
$$2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

0.16 Łamigłówki

W ostatnim dziale wracamy przewrotnie do zadań tekstowych, zagadek i łamigłówek matematycznych. Niektóre z nich rozwiązać można czysto „zdroworozsądkowo”. Niektóre wymagać będą jednak znajomości narzędzi takich jak zasada szufladkowa Dirichleta, grafy czy kolorowania. Stosowanie tych metod kombinatorycznych nie jest proste i, niestety, rzadko ma miejsce w szkole. Wydaje się jednak, że dla rozwoju myślenia matematycznego i pogłębienia w sobie przyjemności kontaktu z Królową Nauk mierzenie się z tymi problemami jest wprost niezbędne.

Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

Zadanie 415. Przesuwając 1 zapałkę ułożyć kwadrat:



Zadanie 416. Kratki zeszytu są pomalowane na dwa kolory. Udowodnij, że można wskazać cztery kratki tego samego koloru, które są wierzchołkami prostokąta.

Zadanie 417. Kwadrat podzielono na 49 małych kwadracików i w każdy wpisano liczbę ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Potem zliczono sumę w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Pokazać, że co najmniej dwie w ten sposób uzyskane sumy są jednakowe.

Zadanie 418. W tabeli o n wierszach i 5 kolumnach rozmieszczono $5n$ liczb o wartości 1 lub -1. Pokazać, że dla $n = 41$ można tak wybrać 3 wiersze i 3 kolumny tabeli, że wszystkie liczby na przecięciach tych wierszy i kolumn były identyczne.

Zadanie 419. Czy można z tablicy umieszczonej poniżej:

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

wybrać sześć różnych liczb od 1 do 6 w ten sposób, aby dowolne dwie z nich stały w różnych wierszach i w różnych kolumnach?

Zadanie 420. Udowodnij, że wśród dowolnych 7 liczb naturalnych istnieją dwie takie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10.

Zadanie 421. Udowodnij, że w zbiorze 2006 liczb całkowitych istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez 2005.

Zadanie 422. Na szachownicy 8×8 ustawiono 8 koników szachowych tak, aby żadne dwa nie „biły" się wzajemnie. Udowodnić, że liczba koników szachowych stojących na czarnych polach jest parzysta.

Zadanie 423. Jaka jest najmniejsza liczba hetmanów, które należy ustawić na szachownicy 8×8 tak, aby wszystkie pola szachownicy były pod ich obstrzałem?

Zadanie 424. Na płaszczyźnie obrano 6 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe. Każde dwa punkty połączono odcinkiem niebieskim bądź czerwonym. Dowieść, że istnieje trójkąt o wierzchołkach w wybranych punktach, którego boki są tego samego koloru.

Zadanie 425. W kole o promieniu 1 wybrano siedem dowolnych punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość jest nie większa niż 1.

Zadanie 426. Zwolennicy i przeciwnicy obowiązkowej matury z matematyki wypełnili Plac Zwycięstwa o wymiarach 2×2. Wykazać, że pewne dwie osoby mające to samo zdaje w tej sprawie znajdują się na Placu w odległości co najmniej $\sqrt{5}$.

Zadanie 427. W prostokącie o bokach długości 2 i 3, znajduje się $12n^2+1$ punktów. Pokaż, że istnieje koło o promieniu $1/n$ zawierające co najmniej 3 z danych punktów.

Zadanie 428. W turnieju szachowym rozgrywanym systemem „każdy z każdym” brało udział czterech zawodników. Za zwycięstwo szachista otrzymuje 1 punkt, za remis $0,5$ punktu, za przegraną 0 punktów. Po zakończeniu turnieju okazało się, że każdy z zawodników otrzymał inną liczbę punktów. Wykaż, że zawodnik, który zajął ostatnie miejsce, nie wygrał żadnej partii.

Zadanie 429. W turnieju startuje 100 zawodników. Każdy zawodnik ma rozegrać z każdym jedną partię. Każda partia kończy się zwycięstwem jednego z zawodników. Turniej przerwano po rozegraniu 32 rund (czyli każdy zawodnik rozegrał 32 partie). Wykazać, że można znaleźć 4 zawodników, którzy uzyskali taką samą liczbę punktów.

Zadanie 430. Na balu karnawałowym bawi się 2004 gości. Każdy z gości ma na tym balu pewną różną od zera liczbę znajomych. Pokazać, że istnieje dwóch ludzi mających równą liczbę znajomych.

Zadanie 431. W grupie liczącej 200 osób każda zna nie więcej niż 100 osób. Wykaż, że istnieją w tej grupie trzy osoby, z których każde dwie się znają. Zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Zadanie 432. Czy sześcian o wymiarach $6\times 6\times 6$ może być zbudowany z 27 klocków o rozmiarach $1\times 2\times 4$?

Zadania dla uczniów techników i szkół średnich

Zadanie 433. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z czterech kolorów: żółty, czerwony, zielony i niebieski. Każdy kolor został wykorzystany. Wykaż, że istnieje prosta, której punkty są co najmniej trzech kolorów.

Zadanie 434. Płaszczyznę pokolorowano trzema kolorami. Udowodnij, że istnieje odcinek o długości 2, którego końce są tego samego koloru.

Zadanie 435. Danych jest sześć punktów, z których niektóre połączono odcinkami. Pokaż, że albo istnieją trzy punkty, z których każde dwa są połączone ze sobą, albo istnieją trzy punkty, spośród których żadne dwa nie są połączone.

Zadanie 436. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 437. Każdy wierzchołek jedenastokąta pomalowano jednym z czterech kolorów. Udowodnij, że można wybrać 5 kolejnych wierzchołków pomalowanych co najwyżej trzeba kolorami.

Zadanie 438. W zawodach piłki nożnej bierze udział 12 drużyn. Każda para drużyn rozgrywa dokładnie jeden mecz. Dowieść, że w każdej chwili są dwie drużyny, które do tej pory rozegrały taką samą ilość meczów.

Zadanie 439. Udowodnić, że w dowolnej grupie składającej się z 13 osób znajdą się dwie osoby, które mają jednakową liczbę znajomych w tej grupie.

Zadanie 440. Na turniej przyjechało dwudziestu szachistów z kraju P i piętnastu z kraju R. Mają do dyspozycji 9 szachownic. Na ile różnych sposobów można dobrać szachistów dla rozegrania pierwszej partii, jeśli przeciwnicy muszą pochodzić z różnych krajów?

Zadanie 441. W turnieju uczestniczy 16 graczy i każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczna rozegranych meczów nie jest większa od 64.

Zadanie 442. W turnieju szachowym wzięło udział 30 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem. Nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów?

Zadanie 443. Do obrad przy okrągłym stole zasiadła parzysta liczba osób. Po przerwie obiadowej uczestnicy zajęli miejsca przy stole w sposób dowolny. Udowodnij, że istnieją dwie osoby przedzielone tą samą co przed przerwą liczbą osób.

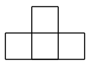
Zadanie 444. W konferencji międzynarodowej uczestniczyło 1985 osób. Każda z nich zna co najmniej 5 języków. W każdej trójce osób znajdują się co najmniej dwie znające ten sam język. Udowodnij, że co najmniej 200 osób zna ten sam język.

Zadanie 445. Na nieskończonej szachownicy ustawionych jest 2001 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1001 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

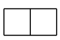
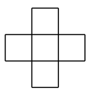
Zadanie 446. W pola nieskończonej szachownicy wpisano liczby naturalne w ten sposób, że każda liczba w polu jest średnią arytmetyczną ośmiu liczb z nią sąsiadujących. Wykaż, że liczba 100 pojawiła się na szachownicy nieskończenie wiele razy albo nie pojawiła się wcale.

Zadanie 447. Czy szachownicę o wymiarach 10×10 można pokryć prostokątnymi płytkami o wymiarach 1×4?

Zadanie 448. Czy szachownicę o wymiarach 10×10 można pokryć tetraminami postaci:

 ?

Zadanie 449. Czy można szachownicę o wymiarach 75×75 pokryć pewną liczbą klocków następującej postaci:

 ,  ?

Zadanie 450. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klockami o wymiarach 1×4 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte (przypomnijmy, że klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy).

Zadanie 451. Czy można wypełnić prostokąt o wymiarach 8×9 klockami o wymiarach 2×2?

Zadanie 452. Udowodnić, że kwadratu 9×9 nie można pokryć przy pomocy pewnej liczby klocków 1×5 i 1×6.

Zadanie 453. Na każdym polu szachownicy o wymiarach 5×5 siedzi biedronka. W każdym ruchu biedronki przeskakują ze swojego pola na pole sąsiednie (tzn. pole o wspólnym boku). Rozstrzygnąć czy jest możliwe, aby po pierwszym skoku wszystkie pola były nadal zajęte przez biedronki.

Zadanie 454. Pola kwadratowej szachownicy 15×15 pomalowano trzema kolorami: czerwonym, żółtym i zielonym. Udowodnić, że w przynajmniej dwóch wierszach liczba pól szachownicy pomalowanych tym samym kolorem jest taka sama.