Podzielność w zadaniach olimpijskich

Seminarium w ramach szkolenia
Projektowanie pracy ucznia uzdolnionego matematycznie
Arkadiusz Męcel (`a.mecel@mimuw.edu.pl`)
Zoom, 29.09.2021 r.

Celem zadań olimpijskich jest **zaciekawienie** uczniów problemami dotyczącymi znanych im treści programowych, których rozwiązanie nie sprowadza się do stosowania gotowych faktów, ale które **uruchomią**, z naszą pomocą, **potencjał rozwojowy** uczniów. Innymi słowy – zadania olimpijskie, choć trudne, nie sprawdzają znajomości wzorów. Ich celem jest pobudzenie wyobraźni i kreatywności. Chciałbym pokazać, na podstawie kilku zadań konkursowych, że jesteśmy w stanie zachęcić uczniów do formułowania hipotez, eksperymentowania i wyciągania wniosków, które będą zaskakujące dla nich samych.

Tematem zajęć jest popularne i stosunkowo szeroko omawiane pojęcie podzielności. Na początku przyjmijmy jedynie, że wiemy czym jest dzielnik. Umówmy się, że pracujemy jedynie z liczbami całkowitymi dodatnimi oraz ich dodatnimi dzielnikami.

Zadanie 1. Znajdź liczbę naturalną o czterech dzielnikach dodatnich, jeśli wiadomo, że jednym z nich jest 49.

Rozwiązanie. W cztery powyższe kratki będziemy wpisywać dzielniki szukanej liczby. Umówmy się, że są one uszeregowane od najmniejszego do największego. Czy możemy na starcie wpisać cokolwiek? Oczywiście tak, najmniejszym dzielnikiem będzie liczba 1.

1			

Wiemy też, że w jedną z kratek trzeba wpisać liczbę 49. W którą? Poczyńmy dwie oczywiste, ale pomocne obserwacje. Wysłowimy je w języku potocznym, a następnie ujmiemy w sposób ścisły.

Uwaga 1. Dzielnik dzielnika jest dzielnikiem, czyli jeśli a dzieli b oraz b dzieli c, to a dzieli c.

Ta oczywista uwaga mówi nam, że jednym z dzielników do wpisania powyżej jest liczba 7. Jest to bowiem dzielnik liczby 49, a więc i dzielnik owej nieznanej liczby o 4 dzielnikach. Tylko gdzie wpisać liczbę 7? Czy na drugim miejscu? A może jest jeszcze inny dzielnik pierwszy, mniejszy od 7? Na poziomie intuicji widzimy, że nie jest to możliwe. Spróbujmy skorzystać z następującego uzasadnienia.

Uwaga 2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas każdy dodatni dzielnik liczby n ma parę, albo jest wyjątkowy – wyizolowany dzielnik. Innymi słowy jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczby n, to są dwie możliwości:

- istnieje liczba całkowita $d' \neq d$ taka, że $n = d \cdot d'$,
  na przykład dla dzielnika 2 liczby 30 takim dzielnikiem „do pary" jest liczba 15,
- $n = d \cdot d$, jak się dzieje na przykład dla dzielnika 6 liczby 36. Dzielnik 6 można nazwać wyizolowanym. Oczywiście liczba naturalna może mieć tylko jeden taki dzielnik. Musi być wtedy kwadratem.

Wniosek z drugiej uwagi jest następujący. Skoro nasza liczba n ma 4 dzielniki, to każdy „ma parę". Jakie są to pary? Jedna to para 1 oraz n. Druga natomiast, to musi być para 7, 49. Nie jest bowiem możliwe, by parę do 1 stanowiły 7 lub 49, bo wtedy nasza liczba miała by za mało dzielników. Skoro jednak 7 i 49 stanowią parę, to $n = 7 \cdot 49 = 343$. A zatem wypełniliśmy tabelkę:

1	7	49	343

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby naturalne podzielne przez 5 i mające pięć dzielników dodatnich.

$$\boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

Rozwiązanie. Na podstawie rozważań z poprzedniego zadania mamy następującą obserwację.

Uwaga 3. Dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.

Szukane przez nas liczby są zatem kwadratami. Wiemy już, że dla każdej z tych liczb pierwszym dzielnikiem wpisanym w powyższe kratki będzie 1. Gdzieś wpisać należy liczbę 5. Spróbujemy teraz skorzystać z obserwacji, że rozważane liczby są kwadratami. Oto kolejna oczywista uwaga.

Uwaga 4. Jeśli liczba pierwsza p jest dzielnikiem kwadratu liczby całkowitej n, to również p^2 jest dzielnikiem n.

Fakt ten nie jest już oczywisty, ale wynika bezpośrednio z twierdzenia o rozkładzie na czynniki pierwsze. W rozkładzie kwadratu na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje parzyście wiele razy. A zatem szukane przez nas liczby mają wszystkie dzielniki:

$$1, \quad 5, \quad 25.$$

Nie wpisaliśmy dzielników w kratki, ponieważ jeszcze nie wiemy w jakiej kolejności to zrobić. Możemy jednak poeksperymentować. Twierdzimy, że liczba 5 musi być wpisana w drugą kratkę. Gdyby 5 stało w trzeciej kratce, to byłoby wyizolowanym dzielnikiem, a więc szukana liczba byłaby równa 25. To jest jednak niemożliwe, bo 25 ma tylko 3 dzielniki. Oczywiście 5 nie może też stać na pozycji piątej. Pamiętajmy też, że 25 musi stać na pozycji dalszej niż 5 i nie może być to pozycja piąta. A zatem mamy:

$$\boxed{1} \quad \boxed{5} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

Bez trudu znajdujemy miejsce dla liczby 25. Nie może to być, jak wspomnieliśmy, pozycja ostatnia. Nie może to być również pozycja czwarta, bo wówczas 5 i 25 stanowiłyby parę i szukana liczba byłaby równa 125. Jednak 125 ma tylko 4 dzielniki: $1, 5, 25, 125$. A zatem 25 stoi na pozycji trzeciej i jest dzielnikiem wizolowanym. A zatem szukana liczba to $25^2 = 625$.

$$\boxed{1} \quad \boxed{5} \quad \boxed{25} \quad \boxed{125} \quad \boxed{625}$$

Warto odnotować jeszcze jedną uwagę, która wyszła chyba przy okazji tych rozważań.

Uwaga 5. Jeśli p jest liczbą pierwszą, wówczas liczba p^n ma $n+1$ dzielników.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba p^2+11 ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.

Rozwiązanie. Zadanie to ma już charakter konkursowy, ale będziemy wciąż korzystać z wcześniejszych obserwacji i formułować nowe. Przede wszystkim sformułujemy obserwację, która będzie wielokrotnie przydatna.

Uwaga 6. Jeśli liczba pierwsza p jest większa od 2, to jest nieparzysta.

Zauważmy, że poza wypadkiem $p = 2$, liczba $p^2 + 11$ jest parzysta. Natomiast dla $p = 2$ liczba $p^2 + 11 = 15$ ma jedynie 4 dzielniki: $1, 3, 5, 15$. Załóżmy więc, że $p^2 + 11$ jest parzysta i ma dokładnie 6 dzielników. Pierwsze dwa możemy już wypisać:

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

Nie od razu widać, że znamy również kolejne dwa dzielniki: 3 oraz 4, ale tylko pod warunkiem, że $p > 3$. Ich znajomość zakończy kończy rozwiązanie zadania: szukana liczba o sześciu dzielnikach musi być równa 12 (bo 3 i 4 stanowić muszą „parę"). Tymczasem $p^2 + 11 > 12$. Jak pokazać podzielność przez 3 i 4? I dlaczego $p = 3$ gra tu osobną rolę? Rzeczywiście bowiem, dla $p = 3$ mamy $p^2 + 11 = 20$, która to liczba ma 6 dzielników $1, 2, 4, 5, 10, 20$. Skąd wiedzieliśmy?

Jeśli liczba p daje resztę 1 z dzielenia przez 3, to p^2 również. istotnie, jeśli $p = (3k+1)$, dla pewnego całkowitego k, to $p^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(k^2 + 2k) + 1$. Podobnie uzasadniamy, że jeśli p daje resztę 2 z dzielenia przez 3, to p^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 3. W obydwu tych przypadkach, liczba $p^2 + 11 = p^2 + 9 + 2$ daje resztę 0 z dzielenia przez 3. A co jeśli p daje resztę 0 z dzielenia przez 3? Jest to liczba pierwsza, a zatem musimy mieć $p = 3$. Pokazaliśmy więc, że dla $p > 3$ znamy trzy dzielniki liczby $p^2 + 11$: są to $1, 2, 3$.

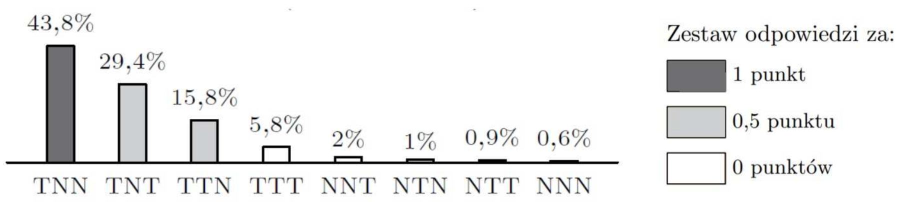
Zajmiemy się teraz resztami z dzielenia p przez 4. Nie mogą być one równe 0, ani 2, bo $p > 3$. A zatem $p = 4s+1$ lub $p = 4s+3$, dla pewnego s całkowitego. W obydwu przypadkach widzimy, że p^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 4. A zatem $p^2 + 11$ daje resztę 0. Stąd tabelka dzielników liczby $p^2 + 11$ jest wypełniona, co kończy rozwiązanie.

1	2	3	4	6	12

Dla liczby pierwszej p liczba $p^2 + 11$ jest podzielna przez 12, i jednocześnie większa od tej liczby. Nie może mieć zatem 6 dzielników. Przy okazji warto wysłowić tę uwagę wprost.

Uwaga 7. Jeśli m jest dodatnim dzielnikiem n, to m ma nie więcej dzielników, niż n.

Zadanie testowe 1. Cyfry $1, 2, 3, 4, 5, 6$ można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest:
a) podzielna przez 5,
b) podzielna przez 9,
c) liczbą pierwszą.



Źródło: X OMG (2014), 13940 uczestników

Zadania olimpijskie zawsze wprowadzają pewien rodzaj dowolności czy komplikacji wykraczający poza standardowe zadanie szkolne. W tym przypadku sprawdzamy oczywiście znajomość cech podzielności przez 5 i 9 oraz... zadajemy dość nieoczekiwane pytanie. Zadania testowe są często skonstruowane w taki sposób, by pierwsze dwa – łatwiejsze podpunkty – zawierały jakąś podpowiedź do ostatniego trudniejszego pytania. Ta trudność jest zresztą jedynie pozorna. Zobaczmy dlaczego.

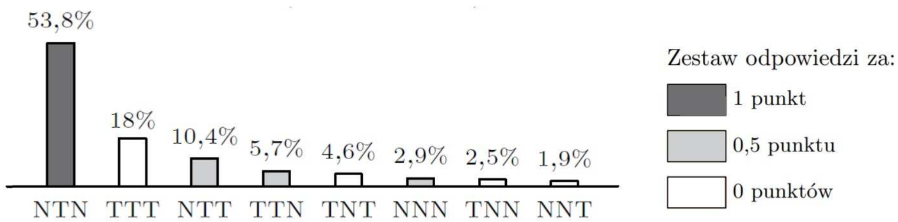
Czy można z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ułożyć liczbę podzielną przez 5? Oczywiście, wystarczy dokonać drobnej zamiany kolejności i ułożyć liczbę 123465. Dosłowne sprawdzenie znajomości kryterium szkolnego. Także podpunkt (b) mógłby znaleźć się w szkolnym podręczniku. Cechę podzielności przez 9 sprawdzamy sumując cyfry danej liczby. W tym przypadku możemy wprawdzie zbudować wiele liczb, ale wszystkie mają cechę wspólną (mówimy czasem: niezmiennik). Suma cyfr tych liczb to 21. A zatem ŻADNA liczba spośród tych, które można ułożyć z tych cyfr nie jest podzielna przez 9, bo 21 nie jest podzielna przez 9.

Dochodzimy teraz do pytania trzeciego, czyli podpunktu (c). Jeśli uczeń przeczyta je zupełnie niezależnie od poprzednich punktów, albo już na poziomie czytania zadania uzna, że pytanie to zupełnie przekracza jego wiedzę (czy - co naturalne - jego znajomość sześciocyfrowych liczb pierwszych) to może nie podejść do całkiem nietrudnego zadania. Odpowiedź na pytanie (c) dostaliśmy w zasadzie przed chwilą. Liczba, którą możemy ułożyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ma sumę cyfr, która jest liczbą podzielną przez 3. A zatem kryterium podzielności przez

3 zaświadcza, że każda taka liczba jest podzielna przez 3. Liczba sześciocyfrowa podzielna przez 3 nie może być liczbą pierwszą (sprawdzamy tu znajomość definicji - rzecz jasna).

A zatem było to zadanie sprawdzające wiedzę, ale niekoniecznie w zupełnie standardowy sposób. W jaki sposób rozwiązywali jest uczestnicy X OMJ? Zajrzyjmy do statystyk. Mało kto dał się oszukać podpunktem (a). Poprawnej odpowiedzi udzieliło ponad 95% uczestników, a było ich niemal 14 tysięcy. Mimo to ponad połowa z nich dała się oszukać przy podpunktach (b) i (c). Prawie 30% uczestników nie zauważyło rozumowania z punktu (c) i w sposób intuicyjny „strzeliło”, że w tak dużym (czy rzeczywiście?) zbiorze liczb musi się znaleźć liczba pierwsza. Prawie 16% nie zauważyło również poprawnej odpowiedzi w punkcie (b), stawiając jednak prawidłową odpowiedź w ostatnim punkcie (co również mówi coś bardziej o ich intuicji niż poprawnym rozumowaniu). Konsekwentni w popełnianiu błędów byli bardzo nieliczni - jedynie 6%. Warto czytać statystyki zadań testowych. Wnioski są bardzo ciekawe.

Zadanie testowe 2. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez
a) 2,
b) 3,
c) 5.



Źródło: IX OMG (2013), 13133 uczestników

Drugie zadanie testowe konfrontuje uczestnika z kryterium bardzo podobnym, z pozoru, do znanego mu kryterium podzielności przez 3. Zadanie jest sformułowane tak, by nie wywołać efektu odstraszającego typu „*Coś takiego widzę po raz pierwszy. To na pewno jest trudne*”. Liczyliśmy, że wzbudzi raczej zaciekawienie i pytania w rodzaju: „*Jak to jest z tym sumowaniem cyfr? Czy istnieją jakieś inne kryteria podzielności niż te, które znam?*” Na teście nie ma zbyt wiele czasu na takie pytania. Na pewno liczyliśmy na to, że nikt nie udzieli trzech twierdzących odpowiedzi tylko na podstawie faktu, że liczby $2, 3$ oraz 5 są dzielnikami liczby 30. Tymczasem, zestaw trzech twierdzących odpowiedzi wybrało 18 procent uczestników IX OMJ!

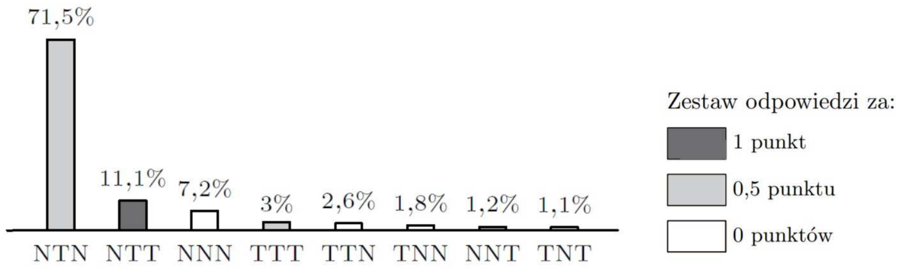
Aby zrozumieć przyczynę warto zwrócić uwagę na konstrukcję pytania. Wychodzimy od pewnej informacji i pytamy o jej możliwe skutki. To jedna z najczęściej spotykanych konstrukcji w zadaniach testowych. Dlaczego to ważne? Nie wystarczy bowiem podać PRZYKŁADU liczby, która ma sumę cyfr równą 30 i jest podzielna przez 2, 3 czy 5. Trzeba zdecydować: czy KAŻDA liczba, której suma cyfr wynosi 30 jest podzielna przez 2? A zatem można odpowiedzieć: TAK, KAŻDA, albo NIE, bo istnieje PRZYKŁAD takiej liczby, która ma sumę cyfr 30, a nie jest podzielna przez którąś z tych liczb. Czasami mówię (niezbyt ściśle), że to jest zadanie „na kontrprzykład”. Łatwo je rozpoznać po sformułowaniu „Wynika z tego, że...”

Jakie są zatem prawidłowe odpowiedzi? Przede wszystkim liczyliśmy, że uczestnicy zorientują się, że liczba, której suma cyfr wynosi 30 nie musi być parzysta. Wystarczy przecież rozważyć liczbę złożoną z samych cyfr ”1”, których jest... 30. Liczba ta jest nieparzysta. Oczywiście nie ma potrzeby szukać tak daleko. Najmniejsza liczba nieparzysta, która sprawia, że odpowiedź na podpunkt (a) brzmi: NIE, to 3999. Kto znajdzie tę liczbę widzi natychmiast, że także odpowiedź w podpunkcie (c) to NIE. Bo 3999 ma sumę cyfr 30, a nie jest podzielna przez 5. I nic nie da, że jest mnóstwo przykładów liczb o sumie cyfr 30, które są podzielne przez 2, 3 czy 5. Wystarczy dopisać kilka zer, na przykład 39990 jest podzielna przez 2, 3, 5.

Podpunkt (b) nie powinien sprawić nikomu problemu, bo mowa jest o kryterium szkolnym. Skoro suma cyfr to 30, a 30 jest podzielna przez 3, to liczba n też jest podzielna przez 3. A zatem odpowiedź w tym podpunkcie brzmi: TAK.

Ważne jest zrozumienie konstrukcji logicznej pytania postawionego w zadaniu. Pojawi się ona jeszcze kilkukrotnie. Niemniej jednak zadanie było całkiem proste, prawda? Zobaczymy teraz przykład bardzo podobnego z pozoru zadania, które sprawiło układającym całkiem sporą niespodziankę.

Zadanie testowe 3. Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez:
a) 3,
b) 5,
c) 7.



Źródło: XIV OMJ (2018), 11419 uczestników

Na pozór zadanie bardzo podobne do poprzedniego, a jednak sama konstrukcja pytania jest zupełnie inna. To jest typ zadania, które nazywam zadaniem „na przykład". Nie pytamy tym razem czy KAŻDA liczba całkowita o sumie cyfr 2 jest podzielna przez 3, bo przecież sama liczba 2 nie jest podzielna przez 3 i byłoby to nonsensem. Użyto sformułowania „Istnieje..." Pytamy tym razem czy JAKAKOLWIEK liczba całkowita o sumie cyfr równej 2 jest podzielna przez 3? To oczywiście zadanie szkolne. Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Wobec tego nie istnieje liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez 3, bo 2 nie jest podzielne przez 3.

Rozumowanie przedstawione wyżej jest wprost banalne, ale 8,5% uczestników testu (czyli ponad 1000 osób) rozwiązało ten podpunkt nieprawidłowo. Daje nam to sygnał, że specyficzna konstrukcja pytania + warunek przypominający kryterium szkolne potrafi wielu uczniów skonfundować. Daje nam to jednak także pozytywny sygnał mówiący, że do testu OMJ podeszło sporo osób, które nie operują biegle cechami podzielności. A zatem można zaprosić do testu nie tylko najlepsze osoby ze szkoły, ale szerszą reprezentację uczniów! Bardzo się cieszymy mogąc przez zadania OMJ nauczyć czegoś takie właśnie osoby.

Podpunkt (b) sprawdza czy uczestnik rozpoznał jakie to są liczby całkowite o sumie cyfr równej 2. Dokładniej - sprawdzamy czy uczestnik uwzględnił liczby, których cyfry są zerami. Jeśli tak, to korzystając ze szkolnego kryterium podzielności przez 5 bez problemu rozwiąże ten problem. Owszem, istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez 5. Jest to na przykład 20, ale też 110, 1100, 1010 i wiele innych... A jednak 11,3% uczniów rozwiązało ten podpunkt nieprawidłowo.

Dochodzimy wreszcie do trudniejszego punktu. Niewiele dzieci zna cechę podzielności przez 7, choć takie cechy istnieją (odsyłam do *Opowieści matematycznych* prof. Szurka). My natomiast konfrontujemy się z uczniem, który prawdopodobnie nie zna żadnej z nich. Być może patrząc na postać możliwych do uzyskania liczb (mogą mieć one jedynie cyfry 0, 1, 2) uczeń będzie zgadywał, że takich liczb podzielnych przez 7 nie ma. W istocie, odpowiedziało tak ponad 80% uczestników testu. A jednak dali się oszukać! Liczba taka istnieje i jest nią 1001. Nietrudno to sprawdzić przez zwykłe dzielenie pisemne. Szokuje to tym bardziej, że gdybyśmy zapytali o to uczniów w klasie - na pewno szybko odnajdą tę liczbę. To właśnie pokazuje jak działają na uczestników warunki egzaminacyjne. To jedna z ważnych zalet testu.

Trudno nie protestować przeciwko takiemu zadaniu. Czy w czasie 75 minut uczestnicy testu mieli szansę wpaść na ten przykład? A co gdyby najmniejszy przykład był sześcio- albo siedmiocyfrowy? Trudno to oczywiście powiedzieć. Patrząc z dzisiejszej perspektywy można nawet zaryzykować przypuszczenie, że postawienie takiego zadania było z naszej strony błędem. Czasem takie wnioski da się sformułować dopiero po teście. Czasami jednak z rozmysłem umieszczany jest taki podchwytliwy podpunkt i ma on także pewien walor edukacyjny. Poprawną konfigurację odpowiedzi znalazło jednak w tym przypadku jedynie 11 procent uczestników testu.

W dalszych zadaniach korzystamy z uwag i metod rozważanych dotychczas, niekiedy w sposób pomysłowy. Rozwiązania napisane są już nieco bardziej skrótowo. Dłuższe komentarze do większości rozwiązań poniższych zadań przeczytać można w tekście `https://mimuw.edu.pl/~amecel/OMJ.pdf`.

Zadanie 4. Czy istnieje liczba o sumie cyfr równej 123, która jest kwadratem liczby całkowitej?

Rozwiązanie. Ponownie korzystamy z Uwagi 4. Często występuje ona przebrana za zestawienie cechy podzielności przez 3 oraz przez 9. Rozważana liczba o sumie cyfr równej 123 jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9. A zatem na mocy Uwagi 4 nie może być kwadratem.

Zadanie 5. Liczby całkowite dodatnie a oraz b mają odpowiednio po 99 oraz 101 dodatnich dzielników. Czy iloczyn ab może mieć dokładnie 150 dodatnich dzielników?

Rozwiązanie. To kolejne zadanie powtórzeniowe. Wiemy już dużo o liczbach a, b. Mają 99 i 101 kwadratów, czyli... nieparzyście wiele! A ich iloczyn ma parzyście wiele. Czy to możliwe? Liczby a i b muszą być kwadratami, a zgodnie z założeniem ab nie może być kwadratem, bo ma parzyście wiele dzielników. Ale iloczyn dwóch kwadratów to kwadrat, czyli z jednej strony ab musi być kwadratem, z drugiej – nie może. Sprzeczność. Nie ma zatem takich liczb a, b.

Zadanie 6. Uzasadnij, że liczba $943^{87} - 243^{87}$ jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$943^{87} = \underbrace{(900 + 43)(900 + 43) \ldots (900 + 43)}_{87}.$$

Interesują nas tylko dwie ostatnie cyfry tego iloczynu. Po wymnożeniu nawiasów mamy składniki złożone z 87 czynników, z których tylko jeden składnik nie zawiera czynnika 900. Jeśli suma zawiera czynnik 900, to jej ostatnie dwie cyfry są zerami, na mocy cechy podzielności przez 100. A zatem o ostatnich dwóch cyfrach liczby 943^{87} decyduje to jakie są ostatnie dwie cyfry liczby 43^{87} – owego jedynego składnika powstałego z wymnożenia nawiasów wyżej, który nie jest podzielny przez 100. Podobnie jest dla 243^{87} – ostatnie dwie cyfry tej liczby są takie same, jak ostatnie dwie cyfry liczby 43^{87}. A zatem odejmujemy od siebie dwie liczby 943^{87}, 243^{87}, które mają identyczne dwie ostatnie cyfry. A zatem dwie ostatnie cyfry ich różnicy to dwa zera. Ta różnica jest zatem podzielna przez 100, a więc także przez 4.

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a + b$ równa się 175.

Rozwiązanie. Dzielnikami pierwszymi liczby 175 są liczby 5 i 7. Wobec tego liczba ab jest podzielna przez 5, skąd wynika, że liczba a lub liczba b jest podzielna przez 5. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że a jest podzielna przez 5. Skoro jednak $b = 175 - a$, to także liczba b jest podzielna przez 5. Stąd wniosek, że obie liczby są podzielne przez 5. Podobnie dowodzimy, że obie liczby a, b są podzielne przez 7. Wobec tego liczby a, b są podzielne przez 35. Jakimi są wielokrotnościami 35? Skoro ich suma to 175, to jeśli $a = 35k$, zaś $b = 35l$, to $a + b = 35(k + l) = 175$. A zatem $k + l = 5$, czyli (k, l) jest jedną z czterech par $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$. Uzyskujemy stąd rozwiązania:

$$(a, b) = (35, 140), \quad (a, b) = (70, 105), \quad (a, b) = (105, 70), \quad (a, b) = (140, 35).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie cztery powyższe pary liczb (a, b) spełniają warunki zadania.

Zadanie 8. Liczby pierwsze a, b, c są większe od 3. Udowodnij, że liczba

$$(a - b)(b - c)(c - a)$$

jest podzielna przez 48.

Rozwiązanie. Z warunków zadania wynika, że liczby a, b, c są nieparzyste i niepodzielne przez 3. W szczególności liczby te mogą dawać tylko reszty 1 i 3 przy dzieleniu przez 4 oraz tylko reszty 1 i 2 przy dzieleniu przez 3. Ponieważ pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 3, więc co najmniej jedna z liczb $a-b, b-c, c-a$ jest podzielna przez 3. To oznacza, że iloczyn $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest liczbą podzielną przez 3.

Podobnie, ponieważ pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 4, więc pewna spośród liczb $a - b, b - c, c - a$ jest podzielna przez 4. Ponadto wszystkie te liczby są parzyste, więc każda z pozostałych dwóch liczb jest podzielna przez 2. W konsekwencji iloczyn $(a - b)(b - c)(c - a)$ jest liczbą podzielną przez $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Ponieważ liczby 3 i 16 są względnie pierwsze, więc łącząc uzyskane wnioski, otrzymujemy, że liczba

$(a-b)(b-c)(c-a)$ jest podzielna przez 48.

Zadanie 9. Wyznacz wszystkie takie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, że każda z liczb $a+b, b+c, c+a$ oraz $a+b+c$ jest pierwsza.

Rozwiązanie. Ponieważ $a+b+c$ jest liczbą pierwszą nie mniejszą od 3, więc jest to liczba nieparzysta. Stąd wynika, że wśród liczb a, b, c jest parzysta liczba liczb parzystych. Jeśli są dokładnie dwie liczby parzyste, to ich suma jest liczbą złożoną, jako liczba pierwsza większa od 2, wbrew warunkom zadania. Wobec tego każda z liczb a, b, c jest nieparzysta. Suma każdych dwóch z nich jest z jednej strony liczbą pierwszą (co wynika z warunków zadania), z drugiej zaś liczbą parzystą. Wobec tego każda z liczb $a+b, b+c, c+a$ jest równa 2. Stąd wniosek, że wszystkie liczby a, b, c są równe 1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 10. Liczby całkowite a, b, c spełniają warunek $a+b+c = bc$. Udowodnij, że liczba $(a+b)(a+c)$ jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie. Przekształcając równość $a+b+c = bc$ otrzymujemy:

$$a+b = bc-c = c(b-1), \quad \text{oraz} \quad a+c = bc-b = b(c-1).$$

Stąd wynika, że:

$$(a+b)(a+c) = c(b-1)b(c-1) = (b-1)b(c-1)c.$$

Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, za tem obie liczby $(b-1)b$ oraz $(c-1)c$ są podzielne przez 2. Wobec tego ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 4, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 11. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że liczba $2^n + 7^n$ jest kwadratem.

Rozwiązanie. Dla $n = 1$ liczba $2^n + 7^n$ równa jest 9, czyli jest kwadratem. Pokażemy, że jest to jedyne rozwiązanie. Pomysł: rozważmy osobno przypadki, gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą.

- Jeśli $n = 2m$, to

  $$(7^m)^2 = 7^n < 2^n + 7^n = 4^m + 7^{2m} < 1 + 2 \cdot 7^m + 7^{2m} = (7^m+1)^2,$$

  czyli liczba $2^n + 7^n$ leży pomiędzy dwoma kolejnymi kwadratami. Nie może być więc kwadratem.

- Jeśli $n = 2m+1$, to liczba $2^n + 7^n$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4, co nie jest możliwe dla kwadratu. I nie potrzebujemy do tego kongruencji. Jest jasne, że $7^n = (8-1)^n$ i po wymnożeniu n nawiasów postaci $8-1$ dostajemy, poza jednym składnikiem, same składniki podzielne przez 8. A zatem

  $$7^n = (8-1)^n = 8k + (-1)^n,$$

  dla pewnego k, co dla n nieparzystego oznacza, że 7^n daje resztę 7 z dzielenia przez 8, czyli resztę 3 z dzielenia przez 4. To zaś, że $2^{2m+1} = 4^m \cdot 2$ jest podzielne przez 4 jest zupełnie jasne (mamy $m > 1$). Zatem proszę nie mówić: „nie znamy kongruencji". Można znać, ale można też nie znać (w szkole podstawowej).

Zadanie 12. Dane są liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeśli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

Rozwiązanie. Ponieważ $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, więc $b^2 = (b-a)(b+a) + a^2$. Prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez liczbę $a+b$, a zatem liczba b^2 jest także podzielna przez liczbę $a+b$.

Zadanie 13. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech d będzie dodatnim dzielnikiem liczby $2n^2$. Pokaż, że liczba $n^2 + d$ nie jest kwadratem.

Rozwiązanie. Cała trudność to wprowadzić dodatkowe oznaczenia i uwierzyć, że do „czegoś dojdziemy" (częste postępowanie w przypadku założenia, że mamy podzielność przez liczbę opisaną pewnym wyrażeniem). Z założenia zadania istnieje więc dodatnia liczba k taka, że

$$2n^2 = kd.$$

Załóżmy, wbrew tezie (po raz kolejny), że $n^2 + d = m^2$, dla pewnego całkowitego dodatniego m. Wówczas:

$$m^2 = n^2 + \frac{2n^2}{k}$$

czyli

$$(mk)^2 = n^2(k^2 + 2k).$$

A zatem $k^2 + 2k$ musi być kwadratem. Ale przecież $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$. Dostaliśmy sprzeczność.

Zadanie 14. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od 1 do 1000, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez 3 itd. Ogólniej, kolejne, k-te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik 1000 razy?

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli spojrzymy na przykład na żarówkę o numerze 100, to które przełączenia jej dotyczyły? Oczywiście pierwsze, bo wtedy zapalono wszystkie światła. Potem drugie, bo 100 dzieli się przez 2, a więc w drugiej operacji zgaszono żarówkę o numerze 100. Trzecie przełączenie nie dotyczyło 100, bo 3 nie jest dzielnikiem 100. Czwarte przełączenie zmieniło stan żarówki o numerze 100. Włączyło ją ponownie, bo 4 jest dzielnikiem 100. Czy widzicie Państwo zależność? Żarówka o numerze 100 została przełączona tyle razy, ile dzielników ma liczba 100. I to dotyczy każdej innej żarówki. Ale to nie wszystko. Udało nam się jakoś połączyć problem z liczbą dzielników, ale jak rozpoznać żarówki, które po 1000 przełączeń pozostały zapalone? Otóż skoro zaczęliśmy od zgaszonych żarówek, a potem każda żarówka poddana jest na przemian zapalaniu i gaszeniu, to po zakończeniu przełączania zapalone są te, których stan zmienił się... nieparzyście wiele razy! A zatem zapalone zostaną tylko żarówki o tych numerach, których liczba dzielników jest nieparzysta! Ale wiemy dokładnie jakie to numery. Są to kwadraty liczb mniejszych od 1000. Jest ich 31.

Zadanie 15. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n, że liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$. Wykaż, że liczba $m + n^3$ jest podzielna przez $m + n$.

Rozwiązanie. Liczba $m + n$ jest dzielnikiem liczby $m + n^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m + n$ jest dzielnikiem liczby:

$$m + n^2 - (m + n) = n^2 - n = n(n - 1).$$

Z kolei $m + n$ jest dzielnikiem liczby $m + n^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m + n$ jest dzielnikiem liczby:

$$m + n^3 - (m + n) = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Zauważmy, że $n(n-1)$ jest dzielnikiem liczby $n(n-1)(n+1)$. Wobec tego jeżeli pierwsza z tych liczb dzieli się przez $m + n$, to druga także, co kończy rozwiązanie.