Nieokresowe rozwinięcia

Zdalne seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
8-9.05.2020 r., platforma Zoom

Zadanie 1 (Champernowne, 1933)**.** *Dana jest liczba $x \in (0,1)$, dla której kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego po przecinku są (czytanymi od lewej) cyframi w zapisie dziesiętnym kolejnych liczb naturalnych: $x = 0,123456789101112131415...$ Pokazać, że x jest liczbą niewymierną.*

Rozwiązanie. Niech a_n będzie n-tą cyfrą po przecinku w rozwinięciu x. Załóżmy, wbrew tezie, że istnieje N, M takie, że $a_N = a_{N+kM}$, dla każdego $k \geqslant 1$. Wiadomo, że istnieje potęga liczby 10 mająca więcej cyfr niż $2M$, która jest większa od N. A zatem rozwinięcie tej potęgi 10 wystąpi dalej niż na N-tym miejscu w rozwinięciu liczby x. A zatem w rozwinięciu liczby x, dalej niż na miejscu N-tym znajduje się $2M$ zer. Jeśli rozwinięcie x jest nieskończone okresowe o okresie M to oznacza, że wszystkie cyfry w tym okresie wynoszą 0. To oznacza, że x ma rozwinięcie skończone, co nie jest prawdą. A zatem x jest liczbą niewymierną. ■

Zadanie 2 (Lambert, 1758; Cantor, Dedekind, Heine, 1872)**.** *Jaka jest najmniejsza liczba różnych cyfr, które muszą występować nieskończenie wiele razy w rozwinięciu dziesiętnym liczby niewymiernej?*

Rozwiązanie. Liczba ta wynosi 2. Gdyby liczba ta wynosiła 1, to by znaczyło, że istnieje liczba niewymierna, w której rozwinięciu dziesiętnym co najwyżej jedna cyfra powtarza się nieskończenie wiele razy. Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone, więc wszystkie cyfry nie mogą w nim występować skończenie wiele razy. Gdyby zaś dokładnie jedna cyfra występowała nieskończenie wiele razy w rozwinięciu dziesiętnym liczby niewymiernej, wówczas rozwinięcie to od pewnego miejsca zawierałoby jedynie tę cyfrę (bo w takim przypadku liczba wystąpień pozostałych cyfr jest ograniczona). A zatem byłaby to liczba wymierna. Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej musi zatem mieć przynajmniej dwie cyfry występujące nieskończenie wiele razy. I rzeczywiście biorąc liczbę, która na $n!$-miejscu po przecinku ma 1, a na pozostałych zera otrzymujemy liczbę niewymierną (a nawet przestępną), co pokazujemy identycznie jak w Zadaniu 1. ■

Zadanie 3. *Porównując zapisy dziesiętne liczb całkowitych dodatnich pokazać niewymierność liczby $\sqrt{2}$.*

Rozwiązanie. Załóżmy przeciwnie, że $\sqrt{2}$ jest wymierna, a więc $\sqrt{2} = a/b$, przy czym $b \neq 0$ oraz a, b są względnie pierwsze. Mamy więc $2b^2 = a^2$. Wiadomo, że b^2 ma cyfrę jedności równą $0, 1, 4, 5, 6, 9$, a zatem $2b^2$ ma cyfrę jedności $0, 2$ lub 8. Skoro jednak a^2 równe jest $2b^2$, to cyfry jedności $2, 8$ są wykluczone. A zatem $2b^2$ kończy się zerem. To oznacza, że b^2 kończy się 0 lub 5, co jest w sposób oczywisty niemożliwe, bo wówczas tymi samymi cyframi musi się kończyć a^2, co przeczy względnej pierwszości a i b.

Podobnej idei używamy dla pokazania, że rozwinięcie $\sqrt{2}$ nie jest skończone. Załóżmy przeciwnie, na przykład

$$\sqrt{2} = 1, abc$$

gdzie a, b, c to cyfry i $c \neq 0$,. Mnożąc przez tysiąc i podnosząc do kwadratu dostajemy:

$$2000000 = (1000\sqrt{2})^2 = (1abc)^2.$$

Ta równość nie może mieć miejsca, ponieważ cyfra jedności liczby 2000000 to zero, a cyfra jedności liczby po drugiej stronie jest kwadratem liczby całkowitej, której cyfra jedności c jest niezerowa. ■

Zadanie 4 (Estonia, 1998)**.** *Liczba rzeczywista $x \notin \{-1, 0, 1\}$ ma tę własność, że zarówno x jak i jej odwrotność $\frac{1}{x}$ mają identyczne rozwinięcia dziesiętne po przecinku. Pokazać, że x jest liczbą niewymierną.*

Rozwiązanie. Założenie implikuje, że liczba $x - \frac{1}{x}$ jest całkowita niezerowa. Oznaczmy ją jako n. Mamy wówczas:

$$x - \frac{1}{x} = n \Leftrightarrow x^2 - nx - 1 = 0.$$

Wyróżnik tego równania kwadratowego wynosi $\sqrt{n^2+4}$. Pierwiastek z liczby całkowitej jest wymierny, wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowity. Pokażmy, że dla $n \neq 0$ liczba $\sqrt{n^2+4}$ nie jest całkowita. W przeciwnym przypadku $n^2 + 4 = m^2$, dla pewnego $m > 0$. A zatem $n^2 - m^2 = 4$, czyli $(n-m)(n+m) = 4$. To równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich. ■

Zadanie 5. *Na n-tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby x znajduje się cyfra jedności liczby a^n, gdzie a jest pewną ustaloną liczbą całkowitą dodatnią oraz n przebiega wszystkie liczby całkowite dodatnie. Rozstrzygnąć czy x jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Rozwiązanie. Niech a_n będzie n-tą cyfrą w rozwinięciu liczby x. Wówczas wiadomo, że a_{n+1} to reszta z dzielenia $a_n \cdot a$ przez 10. Wiadomo, że dla pewnego s mamy $a_{n+s} = a_n$, bo jest tylko 10 cyfr. Ale liczba a_{n+s} to reszta z dzielenia iloczynu a_n oraz a^s przez 10. A zatem $a_{n+s} \cdot a^s$ znowu ma identyczną resztę z dzielenia przez 10. I tak dalej. A zatem jest to rozwinięcie okresowe, a x jest liczbą wymierną. ■

Zadanie 6. *Na $2n-1$-wszym i $2n$-tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby x znajdują się odpowiednio cyfra dziesiątek i cyfra jedności liczby $(n+3)^2$, dla każdego $n \geqslant 1$. Rozstrzygnąć czy x jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że zachodzi równość $(100+x)^2 = 10000 + 200x + x^2$. A zatem ostatnie dwie cyfry liczby x^2 oraz $100 + x^2$ są identyczne. A zatem także dwie ostatnie cyfry każdej z liczb $100n + x^2$ są identyczne, co oznacza, że rozwinięcie dziesiętne liczby x jest okresowe. Jest to zatem liczba wymierna. ■

Zadanie 7 (Rumunia TST, 1980)**.** *Na n-tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby x znajduje się cyfra jedności liczby $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n$, dla każdego $n \geqslant 1$. Rozstrzygnąć czy x jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Rozwiązanie. Niech ostatnia cyfra liczby całkowitej n to $l(n)$. Ciąg $l(a^n)$ jest okresowy (zadanie 5), i jego okres wynosi

- 1, jeśli $l(a) \in \{0, 1, 5, 6\}$,
- 2, jeśli $l(a) \in \{4, 9\}$,
- 4, jeśli $l(a) \in \{2, 3, 7, 8\}$.

Co więcej sam ciąg $l(n)$ też jest oczywiście okresowy, ma okres 10. Najmniejsza wspólna wielokrotność 10 oraz 4 to 20. Kładąc:

$$m = (n+1)^{n+1} + \ldots + (n+20)^{n+20},$$

widzimy, że $l(m)$ nie zależy od n. Nietrudno sprawdzić, że biorąc $n = 0$ dostajemy, że $l(m) = 4$. W szczególności ostatnia cyfra liczby:

$$m = (n+1)^{n+1} + \ldots + (n+100)^{n+100},$$

to 0, a więc rozwinięcie x ma okres długości 100. Jest to więc liczba wymierna. ■

Zadanie 8 (IMO Shortlist, 2006)**.** *Dane są liczby dodatnie x, y, mniejsze od 1 i takie, że n-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby y jest 2^n-tą cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby x. Pokazać, że jeśli x jest liczbą wymierną, to y też jest liczbą wymierną.*

Rozwiązanie. Skoro x jest wymierna, to jej rozwinięcie jest skończone lub nieskończone okresowe. Pierwszy przypadek implikuje trywialnie, że y ma skończone rozwinięcie, więc jest wymierna. Rozważmy drugi przypadek. niech n będzie długością okresu liczby x. Istnieje N takie, że 2^N-te miejsce w rozwinięciu x jest cyfrą z okresu rozwinięcia dziesiętnego liczby x, a więc jest jedną z n liczb, załóżmy, że jest to liczba k-ta w tym okresie. Zatem 2^{N+1}-ta cyfra w rozwinięciu x jest s_1-tym elementem tego samego ciągu cyfr stanowiącego okres, gdzie $s_1 = 2k \mod n$. Podobnie 2^{N+m}-ta cyfra w rozwinięciu x jest s_m-tą liczbą w okresie, gdzie $s_m = 2^m k$ modulo n. Ale jest tylko skończenie wiele reszt modulo n, więc ciąg s_m jest periodyczny. Liczba y jest zatem wymierna. ■

Zadanie 9 (Francja, 1996)**.** *Liczby a, b są całkowite dodatnie, przy czym a jest nieparzysta. Określamy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rekurencją o warunku początkowym $a_1 = b$ i określoną dla $n \geqslant 1$ wzorem:*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{gdy } a_n \text{ jest parzysta,} \\ a_n + a, & \text{gdy } a_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Niech $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ będzie liczbą rzeczywistą, której rozwinięcie dziesiętne zawiera na n-tym miejscu po przecinku cyfrę jedności liczby a_n, dla $n \geqslant 1$. Rozstrzygnąć czy x jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.

Rozwiązanie. Kluczowa obserwacja jest taka, że istnieje n, dla którego $a_n \leqslant a$. Zauważmy, że jeśli $a_m > a$, to gdy a_m jest parzyste, wówczas $a_{m+1} = a_m/2 < a_m$. Jeśli a_m jest nieparzyste, wówczas $a_{m+2} = (a_m + a)/2 < a_m$. Zatem dla każdego wyrazu ciągu a_n większego od a istnieje mniejszy wyraz, który jest dalej. Dostajemy więc podciąg, który maleje, a nawet musi ostatecznie się zatrzymać, dla pewnego $a_n \leqslant a$.

Twierdzimy, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n jest mniejszych niż $2a$. Gdyby tak nie było, to niech a_r będzie największym elementem o tej własności. Jeśli a_r jest parzysty, to $a_{r+1} = a_r/2 < 2a$. Jeśli a_r jest nieparzysty, to $a_{r+2} = (a_r + a)/2 < 3a/2 < 2a$, co jest znowu niemożliwe. A zatem jest nieskończenie wiele elementów naszego ciągu mniejszych niż $2a$. W szczególności ciąg a_n jest okresowy, a zatem i ciąg jego ostatnich cyfr jest okresowy. Liczba x jest zatem wymierna. ∎

Zadanie 10 (Indie, 2009). *Określamy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ warunkami:*

$$a_n = \begin{cases} 0, & \textit{jeśli liczba dzielników dodatnich liczby } n \textit{ jest nieparzysta,} \\ 1, & \textit{jeśli liczba dzielników dodatnich liczby } n \textit{ jest parzysta.} \end{cases}$$

Niech $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$ będzie liczbą rzeczywistą, której rozwinięcie dziesiętne zawiera na n-tym miejscu po przecinku cyfrę a_n, dla $n \geqslant 1$. Rozstrzygnąć czy x jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.

Rozwiązanie. Pokażemy, że x jest liczbą niewymierną. Załóżmy przeciwnie. Jeśli x jest liczbą wymierną, to ma rozwinięcie nieskończone okresowe. Weźmy więc takie k, l, że $a_n = a_{n+l}$, dla wszystkich $n \geqslant k$. Rozważmy l cyfr $a_{m+1}, \ldots, a_{m+l}$, gdzie $m \geqslant k$. Ten ciąg musi zawierać chociaż jedno zero. W przeciwnym razie $a_n = 1$, dla $n > k$, co jest absurdem, bo oznaczałoby, że $n > k$ nigdy nie jest kwadratem. Zatem każde l kolejnych wyrazów ciągu (a_n) musi zawierać 0. Z drugiej strony wiemy, że równica pomiędzy dwoma kolejnymi kwadratami jest dowolnie duża, bo $(t+1)^2 - t^2 = 2t + 1$. To przeczy naszemu założeniu, bo na pewno znajdziemy kwadrat większy od a_{m+l}, którego od kolejnego dzieli więcej niż l liczb. To znaczy, że okres liczby x jednak nie zawiera zera, sprzeczność. ∎

* * *

Przez $\mathrm{onc}(x)$ oznaczamy ostatnią niezerową cyfrę w rozwinięciu dziesiętnym liczby całkowitej dodatniej.

Zadanie 11. *Udowodnić, że jeśli a, b są liczbami całkowitymi oraz $\mathrm{onc}(a) \neq 5$ i $\mathrm{onc}(b) \neq 5$, wówczas $\mathrm{onc}(ab)$ równa jest cyfrze jedności liczby $\mathrm{onc}(a) \cdot \mathrm{onc}(b)$.*

Dowód. Niech x' oznacza liczbę x bez końcowych zer, a więc $x' = x/10^i$, gdzie 10^i to największa potęga 10 dzieląca x. Oczywiście $\mathrm{onc}(x)$ równe jest ostatniej cyfrze x'. Z podanych założeń wiemy też, że $(ab)'$ nie jest podzielna przez 5, a zatem $(ab)' = a'b'$. Stąd $\mathrm{onc}(ab)$ równe jest ostateniej cyfrze $a'b'$. Ta zaś jest równa ostatniej cyfrze iloczynu a' oraz b', czyli iloczynowi ostatnich niezerowych cyfr a oraz b. □

Zadanie 12. *Wykazać, że $\mathrm{onc}(n!)$ równe jest cyfrze jedności liczby*

$$2^x \cdot \mathrm{onc}(x!) \cdot y!,$$

gdzie $n = 5x + y$, przy czym x jest liczbą całkowitą nieujemną oraz $0 \leqslant y < 5$.

Rozwiązanie. Teza z pewnością jest prawdziwa dla $n = 2, 3, 4$. Dla $n \geqslant 5$ rozbijamy sobie $n!$ na iloczyny x piątek kolejnych liczb i ewentualnie na końcu mamy jeszcze iloczyn y liczb. Z każdego z x czynników wyciągamy 5, co daje czynnik 5^n oraz wyciągamy $x!$, bo przed każdą piątką stoi kolejna liczba od 1 od x. Rozważmy iloczyn $(5m+1)(5m+2)(5m+3)(5m+4)$ Jest to iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych, a więc liczba podzielna przez 24. Nietrudno zauważyć, że ostatnia cyfra tego iloczynu podzielonego przez 4 to 6. Można po prostu wymnożyć i się bez trudu o tym przekonać. A zatem $n! = 5^x \cdot x! \cdot 2^x \cdot 2^x \cdot 6^x \cdot y!$. Widzimy, że patrząc na ostatnią niezerową cyfrę możemy zaniedbać 10^x, które pojawiło się w tym przedstawieniu. A zatem:

$$\mathrm{onc}(n!) = \mathrm{onc}(2^x \cdot x! \cdot 6^x \cdot y!) = \mathrm{onc}(2^x \cdot x! \cdot y!),$$

ponieważ y jest iloczynem x liczb o końcówce 6, a cała liczba $x! \cdot 2^x \cdot y!$ jest parzysta, więc jej iloczyn przez 6 nie zmienia ostatniej cyfry. ∎

Zadanie 13 (G. Dresden 2001). *Dana jest liczba $x \in (0, 1)$, która na n-tym miejscu po przecinku ma cyfrę równą $\mathrm{onc}(n!)$. Rozstrzygnąć czy x jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Rozwiązanie można znaleźć w pracy *Two Irrational Numbers That Give the Last Non-Zero Digits of $n!$ and n^n*, dostępnej pod adresem: `https://arxiv.org/pdf/1904.10274.pdf`. .