Dzień pierwszy - grupa starsza

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba $\sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ jest wymierna.

2. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 20 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150 \end{cases}$$

3. Ile jest 20 elementowych ciągów o wyrazach pochodzących ze zbioru $\{0, 1\}$ takich, w których wszystkie zera występują po kolei lub wszystkie jedynki występują po kolei, lub zachodzą obydwa wyżej wymienione przypadki?

4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz $f(0)$.

5. W pewnym królestwie było dużo (ale skończenie wiele) miast, a jednym z tych miast była stolica. Między dowolnymi miastami A i B kursował dyliżans, zarówno na trasie od A do B, jak i na trasie od B do A, przy czym każdy z tych dwóch kursów kosztował tyle samo. Załóżmy, że wszystkie trasy zawierające dokładnie jeden postój w każdym z miast królestwa kosztowały tyle samo. Udowodnij, że wszystkie trasy zawierające dokładnie jeden postój w każdym z miast królestwa za wyjątkiem stolicy (do której trasy te nie prowadzą) kosztują tyle samo.

Dzień pierwszy - grupa starsza - rozwiązania

1. *Wyznacz wszystkie liczby całkowite* n*, dla których liczba* $\sqrt{3n^2+2n+2}$ *jest wymierna.*

   Zauważmy, że jeśli $3n^2+2n+2=m^2$, to $(3n+1)^2+5=3m^2$. Prawa strona tej równości daje resztę z dzielenia przez 4 równą 0 lub 3. Lewa strona natomiast może dawać reszty z dzielenia przez 4 równe 1 lub 2. Stąd nie ma takich n, dla których wyjściowe wyrażenie byłoby liczbą wymierną.

2. *Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:*

$$\begin{cases} a+b+c+d & =20 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd & =150 \end{cases}$$

   Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia sprawdzamy, że $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Zauważmy, że wyrażenie $(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2$ równe jest zatem

$$a^2+b^2+c^2+d^2-10(a+b+c+d)+100=100-200+100=0.$$

   Stąd $a=b=c=d=5$.

3. *Ile jest 20 elementowych ciągów o wyrazach pochodzących ze zbioru* $\{0,1\}$ *takich, w których wszystkie zera występują po kolei lub wszystkie jedynki występują po kolei, lub zachodzą obydwa wyżej wymienione przypadki?*

   Wiadomo, że są dwa ciągi składajace się z samych zer lub samych jedynek. Dalej zakładamy, że rozważane ciągi mają zarówno zera jak i jedynki. Zajmijmy się najpierw ciągami, w których występują po kolei same zera. Możemy je zacząć w jednym z 20 miejsc, a dalej w jednym z 19 miejsc stoi jedynka, która kończy nasz ciąg zer. Takich ciągów jest zatem $\frac{20\cdot 19}{2}$ (bo każdy ciąg liczymy podwójnie biorąc pod uwagę początek ciągu zer i pierwszą jedynkę po tym ciągu). Podobnie z ciągami, w których występują po kolei same jedynki. Zatem ostateczna odpowiedź to 382.

4. *Niech* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *będzie funkcją taką, że* $f(f(x))=x^2-x+1$*, dla każdej liczby rzeczywistej* x*. Wyznacz* $f(0)$*.*

   Podstawiając pod x wartości 0 i 1 dostajemy $f(f(0))=f(f(1))=1$. Następnie:

$$f(x^2-x+1)=f(f(f(x)))=f(x)^2-f(x)+1,$$

   a zatem $f(0)^2-f(0)+1=f(1)^2-f(1)+1=f(1)$. Stąd $f(1)^2-2f(1)+1=0$, a więc $f(1)=1$. Stąd $f(0)(f(0)-1)=0$. Jeśli $f(0)=0$, to $1=f(f(0))=f(0)=0$, co jest niemożliwe. Zatem $f(0)=1$.

5. *W pewnym królestwie było dużo (ale skończenie wiele) miast, a jednym z tych miast była stolica. Między dowolnymi miastami* A *i* B *kursował dyliżans, zarówno na trasie od* A *do* B*, jak i na trasie od* B *do* A*, przy czym każdy z tych dwóch kursów kosztował tyle samo. Załóżmy, że wszystkie trasy zawierające dokładnie jeden postój w każdym z miast królestwa kosztowały tyle samo. Udowodnij, że wszystkie trasy zawierające dokładnie jeden postój w każdym z miast królestwa za wyjątkiem stolicy (do której trasy te nie prowadzą) kosztują tyle samo.*

Wynik jest oczywisty jeśli w królestwie są cztery miasta lub mniej. Zakładamy więc, że jest ich przynajmniej 5. Niech $f(XY)$ oznacza koszt podróży z X do Y. Niech K będzie stolicą. Rozważmy dowolne cztery miasta A, B, C, D. Pozostałe miasta nazywijmy: $E_1, \ldots, E_n$. Rozważmy dwa szlaki:

$$A - B - C - D - E_1 - E_2 - \ldots - E_n, \quad A - C - B - D - E_1 - E_2 - \ldots - E_n.$$

Obydwa te szlaki kosztują tyle samo, a stąd wniosek, że $f(AB) + f(CD) = f(AC) + f(BD)$. Stąd:

$$f(KB) + f(AC) = f(KC) + f(AB), \ f(KA) + f(CD) = f(AC) + f(KD).$$

Stąd zaś:

$$f(KA) + f(KB) - f(AB) = f(KA) + f(KC) - f(AC) = f(KD) + f(KC) - f(CD).$$

Zatem dla dowolnych dwóch miast X, Y liczba $f(KX) + f(KY) - f(XY)$ jest stała. Oznaczmy tę stałą przez C. Niech C' będzie natomiast kosztem podróży, która zatrzymuje się w każdym mieście (jest to też stała, zgodnie z założeniem). Rozważmy dowolną podróż, która przechodzi przez wszystkie miasta za wyjątkiem stolicy. Jeśli dołożymy do niej wizytę w stolicy K, zaraz po wizycie w A, a przed wizytą w B, to koszt naszej podróży wzrośnie od $f(AK) + f(KB) - f(AB) = C$, i jako, że podróż obejmie teraz wszystkie miasta, to łączny koszt wyniesie C'. Zatem koszt każdej podróży, która omija tylko stolicę jest stały i wynosi wynosi $C' - C$.

Dzień drugi - grupa starsza

1. Ile jest 16 elementowych ciągów kolejnych liczb nieparzystych, których suma jest trzycyfrowym sześcianem liczby całkowitej?

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite n takie, że n^2 ma w zapisie dziesiętnym jedynie liczby nieparzyste.

3. Niech x, y będą liczbami całkowitymi takimi, że $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Wykaż, że $x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Dana jest szachownica rozmiarów 18 x 18, której każde pole może być czarne lub białe. Na początku wszystkie pola są białe. Możemy wykonać następującą operację: wybieramy rząd lub kolumnę szachownicy, i zamieniamy w jej obrębie kolor wszystkich pól. Czy powtarzając tę operację pewną ilość razy możemy dość do stanu, w którym dokładnie 16 pól szachownicy będzie czarnych?

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ takie, że $f(n!) = f(n)!$ oraz dla każdej pary różnych liczb całkowitych dodatnich (m, n) liczba $f(n) - f(m)$ jest podzielna przez $n - m$.

Dzień drugi - grupa starsza - rozwiązania

1. *Ile jest 16 elementowych ciągów kolejnych liczb nieparzystych, których suma jest trzycyfrowym sześcianem liczby całkowitej?*

   Jeden złożony z liczb dodatnich i jeden złożony z liczb ujemnych.

2. *Znajdź wszystkie liczby całkowite n takie, że n^2 ma w zapisie dziesiętnym jedynie liczby nieparzyste.*

   Zauważmy, że aby warunek zadania był spełniony cyfra jedności liczby n musi być nieparzysta. Jeśli n jest jednocyfrowa, to w grę wchodzą jedynie 1 oraz 3. Załóżmy, że n ma przynajmniej 2 cyfry w zapisie dziesiętnym. Załóżmy, że cyfra dziesiątek liczby n to a, zaś cyfra jedności to b. Przyjrzymy się cyfrze dziesiątek liczby n^2. Zauważmy, że wpływ na to jaka to będzie cyfra mają jedynie cyfry a oraz b, ponieważ $n^2 = (b + 10a + 100x)^2$, dla pewnego x całkowitego dodatniego. Rozwijając ten zapis dostajemy: $n^2 = b^2 + 100a^2 + 10000x^4 + 20ab + 200xb + 2000ax$. Zatem cyfra dziesiątek liczby n^2 jest taka sama jak cyfra dziesiątek liczby $b^2 + 20ab$. Łatwo sprawdzić, że $b = 1, 3, 5, 7, 9$ liczba $b^2 + 20ab$ ma cyfrę dziesiątek, która jest zawsze parzysta. Jedynymi rozwiązaniami są liczby $\{1, 3\}$.

3. *Niech x, y będą liczbami całkowitymi takimi, że $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Wykaż, że $x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej.*

   Zauważmy, że zgodnie z warunkami zadania:

$$3x^2 + x = 3y^2 + y + y^2 \Rightarrow (x - y)(3y + 3x + 1) = y^2$$
$$4x^2 + x - x^2 = 4y^2 + y \Rightarrow (x - y)(4y + 4x + 1) = x^2$$

   Zauważmy, że liczby $3y + 3x + 1$ oraz $4y + 3x + 1$ są względnie pierwsze. Istotnie:

$$NWD(3y + 3x + 1, 4y + 4x + 1) = NWD(3y + 3x + 1, y + x) = NWD(1, y + x).$$

   Zatem $NWD(x^2, y^2) = x - y$. Zauwamy, że każdy czynnik pierwszy występuje dwukrotnie w kwadracie liczby całkowitej, a więc dowolna liczba pierwsza albo jest czynnikiem pierwszym $x - y$ występującym w parzystej potędze, albo nie jest czynnikiem $x - y$. Stąd $x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. *Dana jest szachownica rozmiarów 18 x 18, której każde pole może być czarne lub białe. Na początku wszystkie pola są białe. Możemy wykonać następującą operację: wybieramy rząd lub kolumnę szachownicy, i zamieniamy w jej obrębie kolor wszystkich pól. Czy powtarzając tę operację pewną ilość razy możemy dość do stanu, w którym dokładnie 16 pól szachownicy będzie czarnych?*

   Nie jest to możliwe. Załóżmy przeciwnie, że po pewnej liczbie operacji doszliśmy do 16 czarnych pól. Zauważmy, że jeśli zamienimy kolejnością wykonanie dwóch dowolnych operacji, to uzyskane w ten sposób kolorowanie będzie identyczne. W szczególności dwukrotne wykonanie operacji na dowolnym wierszu lub kolumnie nie zmienia kolorowania. Załóżmy więc, że wykonaliśmy operacje na x wierszach i y kolumnach. Jeśli zostało nam dokładnie 16 czarnych pól, to zachodzi równość: $x(18 - y) + y(18 - x) = 16$. Jest ona równoważna z równością $(x - 9)(y - 9) = 73$. Ale 73 jest liczbą pierwszą, zaś $|x - 9|, |y - 9| < 73$. Sprzeczność.

5. *Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ takie, że $f(n!) = f(n)!$ oraz dla każdej pary różnych liczb całkowitych dodatnich (m, n) liczba $f(n) - f(m)$ jest podzielna przez $n - m$.*

Wykażemy, że są trzy takie funkcje: $f(n) = 1, f(n) = 2, f(n) = n$. Zauważmy, że $f(1!) = f(1) = f(1)!$ oraz $f(2!) = f(2) = f(2)!$. Zatem $f(1)$ oraz $f(2)$ są obydwie równe 1 lub 2, ponieważ są to jedyne liczby spełniające równanie $n = n!$. Mamy więc 4 przypadki:

- Przypadek 1. $f(1) = f(2) = 1$. Dla $k > 2$ mamy $k! - 2 \mid f(k)! - f(2)$, a zatem $k! - 2 \mid f(k)! - 1$. Liczba $k! - 2$ jest parzysta, zatem $f(k)!$ jest nieparzysta, co oznacza, że $f(k)! = f(k) = 1$. Zatem w tym przypadku $f(n) = 1$.
- Przypadek 2. $f(1) = f(2) = 2$. Wiadomo, że $3! - 1 \mid f(3)! - f(1)$, a zatem $5 \mid f(3)! - 2$. Jedyna liczba postaci $n!$, która daje resztę 2 z dzielenie przez 5 to $2!$, zatem $f(3)! = f(3) = 2$. Stąd dla $k > 3$ mamy: $k! - 3 \mid f(k)! - f(3)$, co pociąga za sobą podzielność $k! - 3 \mid f(k)! - 2$. Liczba $k! - 3$ jest wielokrotnością 3, więc także $f(k)! - 2$ jest wielokrotnością 3. Stąd $f(k!)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 2. Zatem $f(k) = 2$.
- Przypadek 3. $f(1) = 1, f(2) = 2$. Wówczas $3! - 1 \mid f(3)! - 2$, a zatem $5 \mid f(3)! - 2$. Stąd $f(3)! = 2$. Jednak $3! - 2 \mid f(3)! - 1$, czyli $4 \mid 2 - 1$, co jest niemożliwe. W tym przypadku nie ma rozwiązań.
- Przypadek 4. $f(1) = 1, f(2) = 2$. Mamy $3! - 1 \mid f(3)! - 1$, a zatem $5 \mid f(3)! - 1$. Stąd $f(3)! = 1$ lub $f(3)! = 6$. Wiemy jednak, że $3! - 2 \mid f(3)! - 2$, a zatem $4 \mid f(3)! - 2$. Stąd $f(3)! = 6$. Zatem $f(3) = 3$. Stąd $f(3!) = 3!$, a dalej $f((3!)!) = (3!)!$ i tak dalej, co oznacza, że istnieją dowolnie duże liczby całkowite dodatnie m, dla których $f(m) = m$. Dla dowolnej $k > 3$ wybierzmy dowolnie dużą m taką, że $m > k$ oraz $f(m) = m$. Stąd $m - k \mid f(m) - f(k)$, a więc $m - k \mid m - f(k)$. Stąd $f(k) - k$ jest podzielne przez $m - k$, dla dowolnej $m > k$. Oznacza to, że $k = f(k)$, dla wszystkich k.

Dzień trzeci - grupa starsza

1. Czy istnieją takie cztery różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że iloczyn dowolnych dwóch z nich powiększony o 2006 jest kwadratem liczby całkowitej?

2. Znajdź najmniejsze n całkowite dodatnie o tej własności, że wielomian $x^4 - nx + 63$ może być zapisany jako iloczyn dwóch wielomianów (niezerowego stopnia) o współczynnikach całkowitych.

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite d o tej własności, że jeśli d dzieli liczbę całkowitą n, to d dzieli też każdą liczbę, którą możemy otrzymać przez przestawienie cyfr liczby n.

4. Niech $m \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Określamy zbiór $S = \{3, 4, 5, \ldots, m\}$. Znajdź najmniejszą wartość m, dla której dowolny podział zbioru S na dwa podzbiory rozłączne A, B takie, że $A \cup B = S$ ma tę własność, że jeden z podzbiorów A, B zawiera liczby (niekoniecznie różne) takie, że $ab = c$.

5. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek:

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leqslant 4.$$

Udowodnij, że:

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geqslant 3.$$

Dzień trzeci - grupa starsza - rozwiązania

1. *Czy istnieją takie cztery różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że iloczyn dowolnych dwóch z nich powiększony o 2006 jest kwadratem liczby całkowitej?*

   Takie liczby nie istnieją. Zauważmy, że 2006 daje resztę 2 z dzielenia przez 4. Tymczasem kwadrat dowolnej liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4. Załóżmy, przez sprzeczność, że istnieją a, b, c, d spełniające warunki zadania. Zatem każda z liczb ab, ac, ad, bc, bd, cd daje resztę 2 lub 3 z dzielenia przez 4. Łatwo stąd wysnuć wniosek, że każda z liczb a, b, c, d daje inną resztę z dzielenia przez 4. To jest jednak niemożliwe, bo wówczas jeden z tych iloczynów dawałby resztę 0. Sprzeczność.

2. *Znajdź najmniejsze n całkowite dodatnie o tej własności, że wielomian $x^4 - nx + 63$ może być zapisany jako iloczyn dwóch wielomianów (niezerowego stopnia) o współczynnikach całkowitych.*

   Zachodzą dwie możliwości. Albo szukana liczba n pochodzi z rozkładu na iloczyn wielomianów stopni 1 i 3, albo z rozkładu na dwa wielomiany stopnia 2. W pierwszym przypadku wiemy, że $w(x) = x^4 - nx + 63$ jest podzielny przez wielomian postaci $x - a$, gdzie a jest całkowite. Zatem a musi być pierwiastkiem $w(x)$. Korzystając z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych wiemy, że a może być równa jedynie $\pm1, \pm3, \pm7, \pm9$. Podstawiając te liczby do wielomianu $w(x)$ otrzymujemy, że najmniejsze całkowite dodatnie n jakie możemy uzyskać wynosi 48 (w przypadku, gdy podstawiamy $x = 3$).

   W drugim przypadku zachodzi rozkład:

   $$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

   Korzystając z twierdzenia o wielomianach równych dostajemy:

   $$a + c = 0, b + d + ac = 0, ad + bc = -n, bd = 63.$$

   Pierwsze dwa równania dają nam równość $b + d = a^2$, stąd jedyne możliwe wartości liczb (b, d) to $(1, 63)$ lub $(7, 9)$. Na tej podstawie wyliczamy możliwe wartości n: $\pm 8 \cdot 62$ lub $\pm 4 \cdot 2$. Stąd odpowiedzią w zadaniu jest $n = 8$.

3. *Wyznacz wszystkie liczby całkowite d o tej własności, że jeśli d dzieli liczbę całkowitą n, to d dzieli też każdą liczbę, którą możemy otrzymać przez przestawienie cyfr liczby n.*

   Pokażemy, że są trzy takie liczby: $\{1, 3, 9\}$. Niech d będzie liczbą spełniającą warunki zadania. Istnieje taka wielokrotność N liczby d, która w swoim zapisie ma liczbę 1. Rozważmy liczbę $10N$. Zauważmy, że w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje zarówno 0 jak i 1. Oczywiście d jest dzielinikiem $10N$, a zatem jest także dzielnikiem każdej liczby, która powstaje z przestawienia cyfr liczby. W szczególności możemy dokonać takiego przestawienia cyfr liczby $10N$, żeby ostatnimi dwiema jej cyframi były cyfry 1 i 0. Nazwijmy tę liczbę d_1. Wiemy, że d dzieli tę liczbę. Wiemy zatem, że d dzieli też liczbę d_2, która powstaje przez zamianę dwóch ostatnich cyfr liczby d_1. Zatem d dzieli także $d_2 - d_1 = 9$. Korzystając z zasad dzielenia przez 3 i 9 łatwo wykazać, że wszystkie trzy pozostające nam możliwości spełniają warunki zadania.

4. *Niech $m \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $S = \{3, 4, 5, \ldots, m\}$. Znajdź najmniejszą wartość m, dla której dowolny podział zbioru S na dwa podzbiory rozłączne A, B takie, że $A \cup B = S$ ma tę własność, że jeden z podzbiorów A, B zawiera liczby (niekoniecznie różne) takie, że $ab = c$.*

Twierdzimy, że 243 jest minimalną wartością m. Załóżmy przeciwnie, że $m \geqslant 243$. Podzielmy S na dwa podzbiory rozłączne A, B tak, że $A \cup B = S$. Spróbujemy odnaleźć w tych zbiorach liczby $3, 9, 27, 81, 243$ tak, żeby warunek $ab = c$ nie zachodził. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $3 \in A$. Zatem 9 musi być w B, a więc 81 musi być w A, zaś 27 musi być w B. W takim razie 243 nie może być w żadnym z tych zbiorów, a więc m jest mniejsze lub równe 243. Dla $m = 242$ dokonujemy podziału zbioru S na podzbiory:

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 81, 82, 83, 84, \ldots, 242\}, \{9, 10, 11, \ldots, 80\},$$

i w żadnym z tych podzbiorów nie ma takich a, b, c, że $ab = c$. Analogicznie konstruujemy podział zbiorów S, dla $m < 242$. Stąd szukane m to 243.

5. *Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leqslant 4.$$

Udowodnij, że:

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geqslant 3.$$

Przyjmijmy, że $x = a + b, y = b + c, z = a + c$. Warunek wyjściowy jest równoważny temu, że $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \leqslant 2$. Po dokonaniu podstawienia dostajemy:

$$\frac{(x + z - y)^2}{4} + \frac{(x + y - z)^2}{4} + \frac{(y + z - x)^2}{4} +$$
$$\frac{(x + z - y)(x + y - z)}{4} + \frac{(x + y - z)(y + z - x)}{4} + \frac{(x + z - y)(y + z - x)}{4} \leqslant 2.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy warunek:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4.$$

Podstawiając wzory na x, y, z do wyjściowej nierówności otrzymujemy:

$$\frac{(x + z - y)(x + y - z) + 4}{4x^2} + \frac{(x + y - z)(y + z - x) + 4}{4y^2} + \frac{(x + z - y)(y + z - x) + 4}{4z^2} =$$
$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 4}{4x^2} + \frac{y^2 - z^2 - x^2 + 2zx + 4}{4y^2} + \frac{z^2 - x^2 - y^2 + 2xy + 4}{4z^2} =$$
$$\frac{(4 - y^2 - z^2) + 2yz + x^2}{4x^2} + \frac{(4 - z^2 - x^2) + 2zx + y^2}{4y^2} + \frac{(4 - x^2 - y^2) + 2xy + z^2}{4z^2} \geqslant$$
$$\frac{2x^2 + 2yz}{4x^2} + \frac{2y^2 + 2zx}{4y^2} + \frac{2z^2 + 2xy}{4z^2} =$$
$$\frac{3}{2} + \frac{yz}{2x^2} + \frac{zx}{2y^2} + \frac{xy}{2z^2}.$$

Zgodnie z nierównością pomiędzy średnimi arytmetyczną i geometryczną mamy:

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} \geqslant 3.$$

Stąd:
$$\frac{3}{2}+\frac{yz}{2x^2}+\frac{zx}{2y^2}+\frac{xy}{2z^2}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3.$$
Równość zachodzi wtedy, gdy $x=y=z$ oraz $x^2+y^2+z^2=4$.