Dzień pierwszy - grupa młodsza

1. Tomek ma T lat. Tyle samo lat liczy sobie w sumie trójka jego dzieci. N lat temu wiek Tomka równy był dwukrotności sumy lat swoich dzieci. Wyznacz T/N.

2. Niech $k = 2012^2 + 2^{2012}$. Ile wynosi cyfra jedności liczby $k^2 + 2^k$?

3. Wykaż, że żadna suma liczb trzycyfrowych postaci

$$ABC + BCA + CAB$$

   nie jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Niech S będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 30\}$ o tej własności, że suma żadnych dwóch różnych jego elementów nie może być podzielna przez 5. Ile elementów może mieć, co najwyżej, zbiór S?

5. Niech P będzie iloczynem pierwszych 100 nieparzystych liczb całkowitych dodatnich. Znajdź największe k o tej własności, że 3^k jest dzielnikiem P.

Dzień pierwszy - grupa młodsza - rozwiązania

1. *Tomek ma T lat. Tyle samo lat liczy sobie w sumie trójka jego dzieci. N lat temu wiek Tomka równy był dwukrotności sumy lat swoich dzieci. Wyznacz T/N.*

   Powiedzmy, że wiek każdego z dzieci wynosi x, y, z. Zatem wiek Tomka to $T = x + y + z$. Przez N laty wiek Tomka wynosił $T - N$, zaś suma wieku jego dzieci wynosiła $x + y + z - 3N$. Zatem $T - N = 2(x + y + z - 3N)$. Skoro $x + y + z = T$, to $T - N = 2T - 6N$, a więc $T = 5N$. Zatem $T/N = 5$.

2. *Niech $k = 2012^2 + 2^{2012}$. Ile wynosi cyfra jedności liczby $k^2 + 2^k$?*

   Zauważmy, że 2012^2 kończy się na 4, ponieważ $2^2 = 4$. Znajdźmy teraz cyfrę jedności liczby 2^{2012}. Nietrudno zauważyć, że jeśli n jest liczbą podzielną przez 4, wówczas 2^n kończy się na 6, np. $2^4 = 16, 2^8 = 256, 2^12 = 4096$ itd. Zatem Liczba k kończy się na 0. Stąd także kwadrat liczby k kończy sie na 0. Skoro natomiast k jest podzielna przez 4, to także 2^k kończy się na 6. Zatem ostateczna odpowiedź to $0 + 6 = 6$.

3. *Wykaż, że żadna suma liczb trzycyfrowych postaci $ABC + BCA + CAB$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.*

   Zauważmy, że suma tych liczb wynosi $111(A + B + C)$, a przecież $111 = 3 \cdot 37$.

4. *Niech S będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 30\}$ o tej własności, że suma żadnych dwóch różnych jego elementów nie może być podzielna przez 5. Ile elementów może mieć, co najwyżej, zbiór S?*

   Zauważmy, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 30\}$ mamy 6 elementów podzielnych przez 5, 6 elementów dających resztę 1 z dzielenia przez 5, 6 elementów dających resztę 2 itd. Kiedy suma dwóch liczb jest podzielna przez 5? Wtedy i tylko wtedy, gdy suma reszt z dzielenia przez 5 jest liczbą podzielną przez 5. W podzbiorze S znajdować się zatem znajdować co najwyżej jedna liczba podzielna przez 5. Sposród 12 liczb dających reszty 1 lub 4 nie możemy wybrać liczb o różnych resztach, bo ich suma byłaby podzielna przez 5. A zatem z tych liczb możemy wybrać co najwyżej 6 liczb (o jednakowej reszcie). Podobnie z 12 liczbami dającymi reszty 2 lub 3. Z nich też możemy wybrać co najwyżej 6. W ten sposób podzbiór S może liczyć co najwyżej $1 + 6 + 6 = 13$ elementów.

5. *Niech P będzie iloczynem pierwszych 100 nieparzystych liczb całkowitych dodatnich. Znajdź największe k o tej własności, że 3^k jest dzielnikiem P.*

   Trzeba policzyć ile razy występuje liczba 3 w rozkładzie na czynniki pierwsze iloczynu $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199$. Wśród pierwszych 100 liczb nieparzystych mamy 33 wielokrotności liczby 3, 11 wielokrotności 9, 4 wielokrotności 27 i jedną wielokrotność 81. Zatem łącznie 3 występuje 49 razy.

Dzień drugi - grupa młodsza

1. Znajdź największą liczbę stanowiącą wielokrotność 36, której cyfry w zapisie dziesiętnym są parami różnymi liczbami parzystymi.

2. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, średnia arytmetyczna pierwszych n wyrazów pewnego ciągu liczb całkowitych wynosi n. Wyznacz 2012. wyraz tego ciągu.

3. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $ab + bc$, $bc + ca$, $ca + ab$ są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10"?

5. Chcemy otworzyć sejf, zakodowany 7 cyfrowym hasłem, złożonym z różnych cyfr. Sejf otworzy się jeśli wpiszemy 7 różnych cyfr i na właściwym miejscu znajdzie się przynajmniej jedna cyfra (np. jeśli hasło to 1234567, to wpisując $\underline{1}345678$ lub $8\underline{2}45679$ otworzymy sejf, ale nie otworzymy go wpisując 2345678). Czy jesteśmy w stanie otworzyć sejf w mniej niż 7 próbach?

Dzień drugi - grupa młodsza - rozwiązania

1. *Znajdź największą liczbę stanowiącą wielokrotność 36, której cyfry w zapisie dziesiętnym są parami różnymi liczbami parzystymi.*

   Szukana liczba jest wielokrotnością 36, a więc także wielokrotnością 9. Zatem suma jej cyfr musi być podzielna przez 9. Jedyny przypadek, gdy suma elementów pewnego podzbioru zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ jest podzielna przez 9 zachodzi, gdy dodamy do siebie liczby $0 + 4 + 6 + 8 = 18$. Zatem szukana liczba składa się z cyfr 0, 4, 6, 8. Nietrudno stwierdzić, że 8640 jest wielokrotnością liczby 36. To właśnie szukana liczba.

2. *Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, średnia arytmetyczna pierwszych n wyrazów pewnego ciągu liczb całkowitych wynosi n. Wyznacz 2012. wyraz tego ciągu.*

   Suma wyrazów ciągu aż to 2012. wyrazu równa jest sumie wyrazów aż do 2011. powiększonej o szukany wyraz 2012. Średnia pierwszych 2012 wyrazów to 2012, zatem suma pierwszych 2012 wyrazów tego ciągu to 2012^2. Podobnie suma pierwszych 2011 wyrazów ciągu to 2011^2. Zatem 2012. wyraz jest różnicą tych liczb. Wynosi on:

   $$2012^2 - 2011^2 = (2012 + 2011)(2012 - 2011) = 4023.$$

3. *Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $ab + bc$, $bc + ca$, $ca + ab$ są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.*

   Zauważmy, że żadna z liczb nie może być równa 0; w przeciwnym razie któraś z liczb $ab + bc, bc + ca, ca + ab$ była równa 0. Jeśli nie wszystkie spośród liczb a, b, c mają jednakowy znak, to albo:

   - dwie spośród liczb a, b, c są dodatnie, a trzecia ujemna, albo
   - dwie spośród liczb a, b, c są ujemne, a trzecia dodatnia.

   W pierwszym przypadku możemy, bez straty ogólności, przyjąć, że $a, b > 0$ oraz $c < 0$. Wtedy jednak $bc + ca < 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Analogicznie w drugim przypadku. Jeśli $a, b < 0$ oraz $c > 0$, to $bc + ca < 0$, co przeczy warunkom zadania.

4. *Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi ,, $10''$?*

   Każda liczba zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10” jest parzysta, ale nie jest podzielna przez 4. Wobec tego dokładnie jeden z czynników $(a+b), (b+c), (c+d), (d+a)$ rozpatrywanej liczby jest parzysty, pozostałe trzy są nieparzyste. Jednak wtedy liczba

   $$(a + b) + (b + c) + (c + d) + (d + a) = 2(a + b + c + d)$$

   byłaby liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy sprzeczność, a więc szukane liczby a, b, c, d nie jestnieją.

5. *Chcemy otworzyć sejf, zakodowany 7 cyfrowym hasłem, złożonym z różnych cyfr. Sejf otworzy się jeśli wpiszemy 7 różnych cyfr i na właściwym miejscu znajdzie się przynajmniej jedna cyfra (np. jeśli*

hasło to 1234567*, to wpisując* $\underline{1}345678$ *lub* $8\underline{2}45679$ *otworzymy sejf, ale nie otworzymy go wpisując* 2345678*). Czy jesteśmy w stanie otworzyć sejf w mniej niż 7 próbach?*

Jest to możliwe. Otworzymy sejf w sześciu próbach. Wystarczy jeśli w kolejnych próbach jako pierwsze 5 cyfr wpisywać będziemy:

$$12345, 23456, 34561, 45612, 56123, 61234.$$

Gdyby nie udało nam się otworzyć sejfu oznaczałoby to, że na pierwszych pięciu miejscach szyfru nie występują cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a tylko cyfry ze zbioru $\{0, 7, 8, 9\}$. Ale hasło złożone jest z różnych cyfr. Nie może być zatem tak, że na pięciu pierwszych pozycjach znajdują się jedynie cyfry ze zbioru czteroelementowego. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że stosując naszą metodę otworzymy sejf w 6 próbach.

Dzień trzeci - grupa młodsza

1. Czy jest możliwe aby podzielić kwadrat na 9 kwadracików tak by po pokolorowaniu jednego z nich na biało, trzech na szaro i pięciu na czarno wszystkie kwadraciki o jednakowym kolorze były tego samego rozmiaru, a kwadraciki różnych kolorów były różnych rozmiarów?

2. Znajdź ilość liczb całkowitych dodatnich mających w zapisie dziesiętnym trzy, niekoniecznie różne, cyfry abc takie, że $a \neq 0$, $c \neq 0$ oraz zarówno $\overline{abc}$ jak i $\overline{cba}$ są podzielne przez 4.

3. Na pewnym uniwersytecie, wydział nauk matematycznych składa się z zakładów: matematyki, statystyki i informatyki. W każdym zakładzie jest czterech profesorów: dwie kobiety i dwóch mężczyzn. W skład kolegium dziekanów wchodzi sześć osób: trzech mężczyzn i trzy kobiety, przy czym kolegium to zawierać musi po dwóch profesorów z każdego z trzech zakładów. Znajdź liczbę możliwych kolegiów, jakie można uformować zgodnie z tymi zasadami.

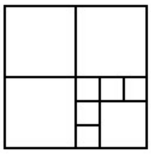
4. Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, ze suma kazdych jedenastu sposród tych liczb jest wieksza od sumy pozostałych dziesieciu. Wykaz, ze wszystkie te liczby sa dodatnie.

5. Trzy sprytne małpy dzielą między siebie stertę bananów. Pierwsza małpa bierze kilka bananów ze sterty, zatrzymuje dla siebie $3/4$ z nich, a pozostałe rozdaje równo pomiędzy dwie pozostałe małpy. Druga małpa bierze kilka bananów, zatrzymuje dla siebie $1/4$ z nich, a resztę dzieli równo pomiędzy pozostałe. Trzecia natomiast, bierze wszystkie pozostałe na stercie banany, zatrzymuje $1/12$ z nich, a pozostałe rozdaje sprawiedliwie pozostałym. Zakładając, że każda małpa otrzymuje całkowitą ilość bananów, gdy tylko banany są rozdzielane oraz, że liczby bananów, które pierwsza, druga i trzecia małpa ostatecznie posiadają pozostają ze sobą w stosunku 3:2:1, jaka jest najmniejsza możliwa liczba bananów znajdujących się na początku w stercie?

Dzień trzeci - grupa młodsza - rozwiązania

1. *Czy jest możliwe aby podzielić kwadrat na 9 kwadracików tak by po pokolorowaniu jednego z nich na biało, trzech na szaro i pięciu na czarno wszystkie kwadraciki o jednakowym kolorze były tego samego rozmiaru, a kwadraciki różnych kolorów były różnych rozmiarów?*

   Jest to możliwe. Poniższy rysunek pokazuje realizację tego zadania:

2. *Znajdź ilość liczb całkowitych dodatnich mających w zapisie dziesiętnym trzy, niekoniecznie różne, cyfry abc takie, że $a \neq 0$, $c \neq 0$ oraz zarówno $\overline{abc}$ jak i $\overline{cba}$ są podzielne przez 4.*

   Liczba jest podzielna przez 4 jeśli jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbą podzielną przez 4. Stąd zarówno $10b + a$, jak i $10b + c$ są obydwie podzielne przez 4. Jeśli b jest nieparzysta, to a oraz c muszą być równe 2 lub 6. Jeśli b jest parzyste, to a oraz c muszą być równe 4 lub 8. Dla każdego wyboru b mamy 2 wybory na a i dwa wybory na c, więc łącznie mamy 40 takich liczb.

3. *Na pewnym uniwersytecie, wydział nauk matematycznych składa się z zakładów: matematyki, statystyki i informatyki. W każdym zakładzie jest czterech profesorów: dwie kobiety i dwóch mężczyzn. W skład kolegium dziekanów wchodzi sześć osób: trzech mężczyzn i trzy kobiety, przy czym kolegium to zawierać musi po dwóch profesorów z każdego z trzech zakładów. Znajdź liczbę możliwych kolegiów, jakie można uformować zgodnie z tymi zasadami.*

   Zasady dopuszczają dwie możliwości.

   - W kolegium jest po jednej kobiecie i jednym mężczyźnie z każdego zakładu. W ten sposób z każdego zakładu wybrać można reprezentację na 4 sposoby. Łącznie mamy ich zatem w tym przypadku 64.
   - Do kolegium wchodzi dwóch mężczyzn z jednego zakładu, dwie kobiety z drugiego zakładu oraz mężczyzna i kobieta z trzeciego zakładu. Jest 6 sposobów wyboru który zakład ma zgłosić dwóch mężczyzn, który dwie kobiety, a który zespół mieszany. Wybór w obrębie zakładu dokonuje się tylko tam, gdzie wybierana jest para kobieta-mężczyzna. To dokonuje się na cztery sposoby. W tym przypadku łączna ilość wyborów to $6 \cdot 4 = 24$

   Odpowiedź: łącznie jest $64 + 24 = 88$ możliwości.

4. *Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, ze suma kazdych jedenastu sposród tych liczb jest wieksza od sumy pozostałych dziesieciu. Wykaz, ze wszystkie te liczby sa dodatnie.*

   Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{21}$ będą tymi liczbami. Wówczas:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{11} > x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{21}$$

$$x_1 + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{21} > x_2 + x_3 + \ldots + x_{11}$$

Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy:

$$2x_1 + (x_2 + x_3 + \ldots + x_{21}) > x_2 + x_3 + \ldots + x_{21}.$$

Stąd $2x_1 > 0$, czyli $x_1 > 0$. Analogicznie dowodzimy, że pozostałe liczby $x_2, x_3, \ldots, x_{21}$ są dodatnie.

5. *Trzy sprytne małpy dzielą między siebie stertę bananów. Pierwsza małpa bierze kilka bananów ze sterty, zatrzymuje dla siebie 3/4 z nich, a pozostałe rozdaje równo pomiędzy dwie pozostałe małpy. Druga małpa bierze kilka bananów, zatrzymuje dla siebie 1/4 z nich, a resztę dzieli równo pomiędzy pozostałe. Trzecia natomiast, bierze wszystkie pozostałe na stercie banany, zatrzymuje 1/12 z nich, a pozostałe rozdaje sprawiedliwie pozostałym. Zakładając, że każda małpa otrzymuje całkowitą ilość bananów, gdy tylko banany są rozdzielane oraz, że liczby bananów, które pierwsza, druga i trzecia małpa ostatecznie posiadają pozostają ze sobą w stosunku 3:2:1, jaka jest najmniejsza możliwa liczba bananów znajdujących się na początku w stercie?*

Niech M będzie minimalną ilością bananów w stercie, zaś x, y, z ilością bananów, jakie kolejne małpy zabierały ze sterty. Oczywiście $x + y + z = M$. Jeśli przez m_1, m_2, m_3 oznaczymy ilość bananów, którymi każda z małp dysponowała po zakończeniu podziału, to zgodnie z powyższą opowieścią dostajemy warunki:

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{3x}{4} + \frac{3y}{4} + \frac{11z}{24} \\ m_2 &= \frac{x}{8} + \frac{y}{4} + \frac{11z}{24} \\ m_3 &= \frac{x}{8} + 3y8 + \frac{z}{12} \end{cases}.$$

Wiemy też, że m_1, m_2, m_3 są w stosunku 3: 2: 1. Skoro $2m_1 = 3m_2$, to:

$$\frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + \frac{11z}{12} = \frac{3x}{8} + \frac{3y}{4} + \frac{11z}{8} \Rightarrow 36x + 22z = 9x + 33z \Rightarrow x = \frac{11z}{27}.$$

Korzystając dalej z tego, że $2m_3 = m_2$ dostajemy:

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} + \frac{11z}{24} = \frac{x}{4} + \frac{3y}{4} + \frac{z}{6} \Rightarrow 3x + 6y + 11z = 6x + 18y + 4z \Rightarrow 3x + 12y - 7z = 0.$$

Wstawiając znaną nam już równość otrzymujemy:

$$3 \cdot \frac{11z}{27} + 12y - 7z = 0 \Rightarrow 27y = 13z \Rightarrow y = \frac{13z}{27}.$$

Z równości:

$$x = \frac{11z}{7}, \quad y = \frac{13z}{27}$$

dostajemy, że z musi być podzielne przez 27 oraz, korzystając z wyjściowych równości, że z musi być podzielne przez 24. Zatem z równe jest przynajmniej 216. Wstawiając tę liczbę do dwóch równań na x, y dostajemy rozwiązanie: $(x, y, z) = (88, 104, 216)$, co daje sumę $x+y+z = 88+104+216 = 408$.