IX Warsztaty Matematyczne I LO

Dzień drugi - grupa starsza

Zadanie 1 (5p)**.** *Dane są liczby rzeczywiste* $a < b < c$. *Znajdź (w zależoności od* a, b, c*) minimalną wartość wyrażenia* $|x - a| + |x - b| + |x - c|$, *gdzie* x *przebiega wszystkie liczby rzeczywiste.*

Zadanie 2 (5p)**.** *W przestrzeni umieszczono 6 punktów tak, że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Punkty połączono odcinkami i każdy z tych odcinków pomalowano na jeden z kolorów: niebieski lub czerwony. Wykaż, że istnieje przynajmniej jeden trójkąt o wierzchołkach należących do zbioru wybranych sześciu punktów, którego wszystkie boki pomalowane są tym samym kolorem.*

Zadanie 3 (10p)**.** *Wykaż, że wśród 2009 liczb* $1, 11, 111, \ldots \underbrace{11\ldots1}_{2009}$ *przynajmniej jedna jest podzielna przez* 2009.

Zadanie 4 (10p)**.** *Wiedząc, że liczby rzeczywiste* a, b, c, d *spełniają równosci* $a + b = c + d$ *oraz* $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ *wykaż, że* $a^{2015} + b^{2015} = c^{2015} + d^{2015}$.

Zadanie 5 (15p)**.** *Ostatnie cztery cyfry abcd w zapisie dziesiętnym liczb całkowitych dodatnich* N *oraz* N^2 *są jednakowe, przy czym* $a \neq 0$. *Wyznacz te cyfry.*

Zadanie 6 (15p)**.** *Okrąg opisany na trójkącie ostrokątnym* ABC *ma środek* O. *Prosta przechodząca przez punkt* O *i prostopadła do* OB *przecina proste* AB *oraz* BC *w punktach* P *oraz* Q. *Wiadomo także, że* $AB = 5, BC = 4$ *oraz* $BQ = 4.5$. *Wyznacz długość odcinka* BP.