

IX Warsztaty Matematyczne I LO

Dzień pierwszy - grupa starsza

Zadanie 1 (5p). Liczby całkowite $x > y > 0$ spełniają równość $x + y + xy = 80$. Wyznacz x .

Zadanie 2 (5p). Dana jest liczba pierwsza p o tej własności, że liczba $16p + 1$ jest trzecią potęgą pewnej liczby całkowitej dodatniej. Wyznacz p .

Zadanie 3 (10p). Opisano okrąg na trójkącie o bokach 20, 21 oraz 29. Trójkąt ten dzieli wnętrze koła wyznaczonego przez ten okrąg na cztery obszary. Niech A, B, C oznaczają pola tych trzech obszarów, które nie są wielokątami, przy czym $A < B < C$. Udowodnij, że $A + B + 210 = C$.

Zadanie 4 (10p). Na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty A, B, C, D , z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że w jednym z trójkątów ABC, ABD, ACD, BCD jeden z kątów wewnętrznych ma miarę nie większą niż 45° .

Zadanie 5 (15p). Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a^5 + b^5 = a^3 + b^3$. Wykazać, że $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$.

Zadanie 6 (15p). Zgodnie z rysunkiem obok, $ABCD$ jest kwadratem, zaś P – punktem w jego wnętrzu. Wiadomo też, że $PA = 1$, $PB = 2$, zaś $PC = 3$. Wyznacz miarę kąta APB .

