XVI Warsztaty matematyczne w I LO w Koszalinie[1]

Test – dzień pierwszy

Zadanie 1. *Istnieje liczba pierwsza $p > 13$ o tej własności, że każda cyfra liczby p jest równa*

.... 0 *lub* 7*;*

.... 1 *lub* 3*;*

.... 2 *lub* 5.

Zadanie 2. *Na tablicy zapisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że*

.... *suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez* 2*;*

.... *suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez* 2*;*

.... *suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez* 3.

Zadanie 3. *Każda z dwóch wysokości pewnego trójkąta ma długość większą od* 1*. Wynika z tego, że*

.... *trzecia wysokość tego trójkąta również ma długość większą od* 1*;*

.... *każdy z boków tego trójkąta ma długość większą od* 1*;*

.... *pole tego trójkąta jest większe od* $\frac{1}{2}$.

Zadanie 4. *Każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ jest równa 1 lub -1. Rozważmy wyrażenie*

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2008}x_{2009} + x_{2009}x_1.$$

.... *istnieją takie $x_1, \ldots, x_{2009}$, że $S = 0$;*

.... *istnieją takie $x_1, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2007$;*

.... *istnieją takie $x_1, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2009$.*

Zadanie 5. *Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Niech $X = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Wówczas:*

.... $X < 1$

.... $X < 2$

.... $X < 3$

Zadanie 6. *Dodatnie liczby całkowite a, b, c są takie, że liczby $2^a, 2^b, 2^c$ są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że:*

.... *jest to trójkąt ostrokątny;*

.... *liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta;*

.... *co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są równe.*

---

[1]Zadania pochodzą w dużej mierze z broszury z testami OMJ, dostępnej pod adresem
HTTPS://OMJ.EDU.PL/UPLOADS/ATTACHMENTS/TESTY11-18.PDF

XVI Warsztaty matematyczne w I LO w Koszalinie

Test – dzień drugi

Zadanie 1. *Liczby a, b, c są naturalne oraz $a + b + c$ jest liczbą parzystą. Wynika z tego, że*

.... abc *jest liczbą parzystą;*

.... $a - b + c$ *jest liczbą parzystą;*

.... $ab + bc + ca$ *jest liczbą parzystą.*

Zadanie 2. *Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość $2a^2 + 4ab = ab + 2b^2$. Wynika stąd, że:*

.... $a = b$;

.... $2a = b$;

.... $a = 2b$.

Zadanie 3. *Dodatnia liczba całkowita n ma tę własność, że liczba $\sqrt{2 + \sqrt{4 + n}}$ jest naturalna. Wynika z tego, że liczba n jest*

.... *podzielna przez* 2;

.... *podzielna przez* 3;

.... *większa od* $\sqrt{2014}$.

Zadanie 4. *W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB punkt M jest środkiem ramienia BC. Wynika z tego, że*

.... $2 \cdot AM < 3 \cdot BC$;

.... *pola trójkątów ABM i ACM są równe;*

.... $\measuredangle CAM = \frac{1}{2}\measuredangle CAB$.

Zadanie 5. *Niech S będzie podzbiorem zbioru liczb wymiernych składającym się z liczb, które w zapisie dziesiętnym mają postać $0,(abc)$, gdzie a, b, c są różnymi cyframi. Wówczas:*

.... *suma elementów zbioru S wynosi 360*

.... *suma elementów zbioru S wynosi 500*

.... *suma elementów zbioru S wynosi 720*

Zadanie 6. *Sześcian przecięto płaszczyzną, która podzieliła go na dwie bryły o równej objętości. Czy powstały w ten sposób przekrój sześcianu może być:*

.... *czworokątem;*

.... *pięciokątem;*

.... *sześciokątem.*

XVI Warsztaty matematyczne w I LO w Koszalinie

Test – dzień trzeci

Zadanie 1. *Istnieje liczba rzeczywista a taka, że liczba* $\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}$ *równe jest*

.... $-2a$;

.... 0;

.... $2a$.

Zadanie 2. *Liczba* $9^{16}-16^9$ *jest podzielna przez*

.... 4;

.... 5;

.... $3^{16}-4^9$.

Zadanie 3. *Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równy* 4^{100}. *Wynika z tego, że:*

.... *liczba n jest parzysta;*

.... *liczba n ma co najmniej* 100 *cyfr;*

.... *suma cyfr liczby n jest nie mniejsza od* 400.

Zadanie 4. *Punkty A i B leżą na okręgu o środku O, przy czym* $\measuredangle OAB = 45^\circ$. *Punkt C leży na dłuższym łuku AB tego okręgu. Wynika z tego, że:*

.... $\measuredangle ABO = 45^\circ$;

.... $\measuredangle ACB = 45^\circ$;

....$\measuredangle ABC < 130^\circ$.

Zadanie 5. *Ile liczb całkowitych z przedziału [1, 2023] można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych?*

.... *więcej niż 1006*

.... *więcej niż 1507*

.... *więcej niż 2008*

Zadanie 6. *W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Dwusieczna kąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie E. Wynika z tego, że:*

.... $EA = BC$;

.... $CA = 2 \cdot AB$;

.... *proste EC i AB są równoległe.*