**Test, dzień pierwszy, grupa młodsza**

1. Na połowinkach 60 procent wszystkich uczniów to dziewczyny. Impreza jest kiepska, bo tylko 40 procent wszystkich uczniów chce się tańczyć. Sytuacja poprawia sie odrobinę, gdy na sali zjawia się 20 chłopaków – wszyscy z nich chętni do tańca. Odsetek dziewczyn na imprezie zmniejsza się tym samym do 58 procent. Ilu osobom chce się tańczyć po przybyciu 20 dodatkowych osób?

......... 600

......... 400

......... 250

2. Załóżmy, że dane jest 5 kolejnych liczb całkowitych $a, b, c, d, e$, przy czym $a > 3$. Wówczas:

......... wszystkie te liczby mogą być złożone

......... przynajmniej 4 z nich są złożone

......... przynajmniej 3 z nich są złożone

3. Dana jest tablica liczb:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 3 & & 5 & & \dots & & 97 & & 99 \\ & 4 & & 8 & & 12 & & \dots & & 197 & \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

gdzie elementy kolejnego wiersza tworzy się przez sumowanie wyrazów znajdujących się w wierszu wyżej – bezpośrednio po przekątnej. Ile razy w całej tablicy wystąpi wielokrotność liczby 67?

......... mniej niż 10 razy

......... więcej niż 10 razy

......... mniej niż 20 razy

4. Załóżmy, że liczby rzeczywiste $a \neq 0$ oraz $b$ spełniają równość $\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a}$. Wówczas:

......... wówczas $|a| = |b|$

......... wówczas $|a| \geqslant |b|$

......... wówczas $a \geqslant b$

5. Rozważmy równanie $|xy| + |x - y| = 1$, gdzie $x, y$ są liczbami całkowitymi. Wówczas:

......... równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań

......... jeśli para $(x, y)$ spełnia to równanie, to $|x| = |y| = 1$

......... jeśli para $(x, y)$ spełnia to równanie to $x \leqslant 2$.

6. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 10 oraz trójkąt ostrokątny $ECD$ o tej własności, że jego część wspólna z kwadratem $ABCD$ ma pole równe 80. Wówczas:

......... trójkąt ten musi być zawarty w kwadracie $ABCD$

......... wysokość tego trójkąta to 20

......... wysokość tego trójkąta to 25

**Test, dzień pierwszy, grupa starsza**

1. Wyznacz ilość takich par liczb całkowitych dodatnich $(a,b)$, że $a+b=1000$ i zarówno $a$, jak i $b$ nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 0.

......... 369

......... 657

......... 739

2. Niech $n$ będzie liczbą naturalną. Wówczas wyrażenie $n!+5$

......... nigdy nie jest kwadratem liczby całkowitej

......... nigdy nie jest sześcianem liczby całkowitej

......... nigdy nie jest czwartą potęgą liczby całkowitej

3. Dany jest trapez ABCD, gdzie $AD||BC$, przy czym $|AD| = 2012, |BC| = 1000$, zaś kąty ostre przy wierzchołkach $A, D$ wynoszą odpowiednio $37°, 53°$. Niech $M, N$ będą środkami podstaw tego trapezu. Wówczas:

......... długość odcinka $|MN|$ jest liczbą całkowitą

......... długość odcinka $|MN|$ jest liczbą wymierną

......... długość odcinka $|MN|$ jest liczbą niewymierną

4. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ ma tę własność, że pola trójkątów $ABC, BCD, CDE, DEA, EAB$ są równe i wynoszą 1. Wówczas:

......... pięciokąt ten jest foremny

......... pole tego pięciokąta jest jednoznacznie określone i znajduje się w przedziale [1,4]

......... pole tego pięciokąta nie jest jednoznacznie określone, ale znajduje się w przedziale [3,5]

5. Liczbę całkowitą nazywamy dobrą, jeśli jest ona równa czterokrotności sumy cyfr swojego rozwinięcia dziesiętnego.

......... nie istnieje pięcyfrowa liczba dobra

......... tylko dla skończenie wielu $n$ istnieje $n$-cyfrowa liczba dobra

......... suma wszystkich liczb dobrych nie przekracza 100

6. Niech $a < b < c$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Rozważmy funkcję

$$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|.$$

......... f osiąga minimum dla $x = c$

......... f osiąga minimum dla $x = a+b$

......... f może osiągać wartość dowolnie bliską 0

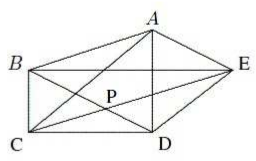
**Odpowiedzi do testów, dzień pierwszy.**

**Grupa młodsza**

1. NIE, NIE, NIE - prawidłowa odpowiedź to 252
2. TAK, NIE, TAK - (24, 25, 26, 27, 28), (5, 6, 7, 8, 9), jasne
3. NIE, TAK, TAK - wielokrotność 37 wystąpi dokładnie 17 razy. Zauważmy, że choć w całej tablicy jest 50 wierszy, to wielokrotności 67 występują jedynie w wierszach nieparzystych; w kolumnie, która leży poniżej 67. Takich wierszy jest 17.
4. NIE, NIE, NIE - z podanego warunku wynika, że $b \geqslant a$
5. NIE, NIE, TAK - to równanie ma 6 rozwiązań: łatwo je wyznaczyć
6. NIE, NIE, TAK - część wspólna to trapez o podstawach długości 6, 10. Zatem układając proporcję otrzymujemy, że h = 25.

**Grupa starsza**

1. NIE, NIE, NIE - prawidłowa odpowiedź to 738. Szukamy 2 liczb, które dodają się do 100, a więc wystarczy liczyć liczby $n$ w przedziale [511,999], które spełniają warunki: brak zera w n, oraz brak zera w $1000-n$. Dla $n \in [511, 899]$ mamy 4 możliwe cyfry setek, 8 możliwych dziesiątek, 9 możliwych jedności, a więc 288 liczb. Dla $n \in [911 - 999]$ mamy 9 możliwych cyfr dziesiątek i i możliwych jedności, a więc 81. A więc łącznie 369 liczb powyżej 511. Do tego 369 poniżej. A więc takich par jest 738.
2. TAK, NIE, TAK - $n! + 5$ daje, dla $n > 3$ resztę 2 z dzielenia przez 3, a więc nie może być ani kwadratem, ani czwartą potęgą, zaś $5! + 5 = 125$ (innych sześcianów nie ma).
3. TAK, TAK, NIE - po przedłużeniu ramion widzimy, że powstały trójkąt jest prostokątny, dalej tw. Talesa.
4. NIE, TAK, NIE - z równości pól dostajemy równoległość odpowiednich przekątnych z bokami. Pole wynosi zawsze $\frac{\sqrt{5}+5}{2}$. Jak je policzyć?




Niech pole $[BPC] = x$. Wówczas $[DPC] = 1 - x$ oraz:

$$\frac{[BPC]}{[DPC]} = \frac{|BP|}{|PD|} = \frac{[EBP]}{[EPD]}.$$

Wynika stąd, że $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$. zatem $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Pole całego pięciokąta $ABCDE$ równe jest $3 + x$, a więc $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

5. TAK, TAK, NIE - są tylko cztery liczby dobre: 12, 24, 36, 48 - istotnie, nie ma jednocyfrowej liczby dobraje, nie ma trzycyfrowej (bo 96a + 6b - 3c = 0, ale ona musi być większa niż 69). Dla $n > 4$ liczba jest nie większa niż $10^{n-1}$, zaś czterokrotnosc sumy cyfr jest nie wieksza niż 36). Tymczsem $10^{n-1} - 36n > 36(10^{n-3} - n) > 0$, a powinno to być 0.

6. NIE, NIE, NIE - funkcja ta osiąga minimum dla $x = b$ i jest to $c - a$. Wystarczy sprawdzić biorąc $x$ kolejno w przedziałach $(-\infty, a), [a, b), [b, c), (c, \infty)$.

**Test, dzień trzeci, grupa młodsza**

1. Po zakończeniu sezonu zasadniczego ligi koszykówki pierwsze 5 zespółów gra mini-turniej mający ustalić kolejność między najlepszymi. Pierwszy mecz grają zespoły: 4. i 5. sezonu zasadniczego. Przegrany zostaje ostatecznie na 5. miejscu. Wygrany gra mecz nr 2. z 3. zespołem sezonu zasadniczego. Przegrany zostaje ostatecznie na 4. miejscu. W trzecim meczu gra zwyciężca drugiego meczu i 2. zespół ligi itd... Ile jest możliwych konfiguracji pierwszych 5 miejsc ligi po zakończeniu mini-turnieju?

......... więcej niż 8

......... nie więcej niż 16

......... nie więcej niż 32

2. Ciąg rosnący $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ...$ zawiera wszystkie liczby całkowite dodatnie, które nie są kwadratami, ani sześcianami liczb całkowitych. Można powiedzieć, że:

......... dwudziesty pierwszy wyraz tego ciągu to 28

......... trzydziesty wyraz tego ciągu to 38

......... setny wyraz tego ciągu to 113

3. Wartość wyrażenia: $\frac{20112010^2}{20112009^2+20112011^2-2}$

......... jest większa od 1/3

......... jest większa od 2/5

......... jest większa od 1/2

4. Powiemy, że liczba trzycyfrowa $abc$ jest geometryczna, jeśli jej cyfry nie są zerami i $a/b = b/c$. Jaka jest różnica pomiędzy największą i najmniejszą liczą trzycyfrową geometryczną?

......... 807

......... 840

......... 931

5. Czworokąt $ABCD$ jest taki, że trójkąty $ABC, BCD, CDA, DAB$ mają równe obwody.

......... czworokąt ten jest zawsze kwadratem.

......... czworokąt ten jest zawsze równoległobokiem.

......... czworokąt ten jest zawsze trapezem.

6. Dany jest sześcian. Każdą z jego ścian malujemy jednym z kolorów: białym lub czarnym. Dwa kolorowania sześcianu, które są identyczne po obróceniu sześcianu uważamy za jedno i to samo kolorowanie. Ile jest możliwych kolorowań?

......... 10

......... 15

......... 20

**Test, dzień trzeci, grupa starsza**

1. Niech $p$ będzie liczbą pierwszą większą niż 5. Wówczas:

......... p - 400 nie może być kwadratem liczby całkowitej

......... p - 40 nie może być sześcianem liczby całkowitej

......... p - 4 nie może być czwartą potęgą liczby całkowitej

2. Ile jest liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 2011, podzielnych przez 3 i 4, ale nie przez 5.

......... więcej niż 800

......... więcej niż 810

......... więcej niż 820

3. Niech $S$ będzie podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, składającym się z liczb, które w zapisie dziesiętnym mają postać $0,(abc)$, gdzie a, b, c są różnymi cyframi. Wówczas:

......... suma elementów zbioru $S$ wynosi 252

......... suma elementów zbioru $S$ wynosi 324

......... suma elementów zbioru $S$ wynosi 360

4. W trójkącie $ABC$ punkty $D$ i $E$ są środkami odpowiednio boków $BC$ i $AC$. Wówczas:

......... jeśli kąty $CAD$ oraz $CBE$ mają po 30°, to $ABC$ jest równoboczny

......... jeśli kąty $CAD$ oraz $CBE$ mają po 30°, to $ABC$ jest równoramienny

......... jeśli kąty $CAD$ oraz $CBE$ są równe, to $ABC$ jest równoramienny

5. Dla jak wielu par kolejnych liczb całkowitych ze zbioru $\{1000, 1001, 1002, \ldots, 2000\}$ nie potrzeba „przenoszenia w pamięci" przy pisemnym ich dodawaniu?

......... 154

......... 155

......... 156

6. Niech $a, b, c$ będą długościami boków trójkąta. Niech $X = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Wówczas:

......... $X < 1$

......... $X < 2$

......... $X < 3$

**Odpowiedzi do testów, dzień trzeci.**

## Grupa młodsza

1. TAK, TAK, NIE: Możliwych konfiguracji jest dokładnie 16. Są 4 mecze i w każdym po 2 różne wyniki. Dwa różne wyniki to dwie różne klasyfikacje końcowe. A więc wszystkich możliwości jest tyle, co możliwych wyników meczów, a więc $2^4 = 16$.

2. TAK, TAK, TAK: Ad. 1Zauważmy, że poniżej 21 mamy 4 kwadraty i 2 sześciany, przy czym liczba 1 jest zarówno kwadratem jak i sześcianem. Zatem ten 21. wyraz to przynajmniej 26. Ale po drodze napotykamy kolejny kwadrat: 25, a więc 21. wyraz przynajmniej 27. Ale 27 jest sześcianem, a więc 21. wyraz ciągu to istotnie 28. Ad 2. Zauważmy, że poniżej 30 mamy 5 kwadratów i 3 sześciany, przy czym liczba 1 jest zarówno kwadratem, jak i sześcianem. Xatem 30. wyraz ciągu to przynajmniej 37. Ale po drodze jest jeszcze kwadrat: 36, zatem 30. wyrazem naszego ciągu jest 38.Ad 3. Zauważmy, że aż do 100 mamy 11 kwadratów i 4 sześciany, przy czym liczby 1 i 64 są zarówno kwadratami, jak i sześcianami. Zatem 100. wyraz ciągu to przynajmniej 113. Po drodze nie mamy jednak żadnego kwadratu ani sześcianu, zatem to rzeczywiście jest 113.

3. TAK, TAK, NIE. To wyrażenie to dokładnie 1/2. Istotnie, wystarczy pobawić się wzorami skróconego mnożenia.

4. NIE, TAK lub NIE, NIE. Niestety zapomniałem dopisać w treści założenie o tym, że cyfry są różne. Wtedy odpowiedź to 840. Najmniejsza - to 124. A największa to nie 931, ale 964. Gdy cyfry są identyczne to zadanie jest bardzo proste: różnica to 999-111 = 888/

5. NIE, TAK, TAK. Trzeba pokazać, że jest to prostokąt. Robimy to pokazując, że przekątne tej figury są równe, podobnie jak parami odpowiadające sobie boki.

6. TAK, NIE, NIE. Odpowiedź to 10. Idziemy przez przypadki, tzn. ustalamy ile ścian ma być kolorowanych na biało:

   - 0 ścian - wówczas jest 1 kolorowanie (wszystko na czarno)
   - 1 ściana - wówczas jest 1 kolorowanie
   - 2 ściany - wówczas są 2 kolorowania: albo ściany mają wspólną krawędź, albo leżą naprzeciw siebie
   - 3 ściany - wówczas są 2 kolorowania: albo ściany mają wspólny wierzchołek, albo nie
   - 4 ściany - tak jakbyśmy rozpatrywali problem dla dwóch czarnych - 2 kolorowania
   - 5 ścian - tak jakbyśmy rozpatrywali problem dla jednej czarnej - 1 kolorowanie
   - 6 ścian - 1 kolorowanie

## Grupa starsza

1. NIE, NIE, TAK: 409 - 400 = 9, 67 - 40 = 27. Jeśli chodzi o czwarte potęgi, to gdyby p-4 było czwartą potęgą, to

$$p = q^4 + 4 = q^4 + 4q^2 + 4 - 4q^2 = (q^2 + 2)^2 - (2q)^2 = (q^2 + 2q + 2)(q^2 - 2q + 2),$$

a skoro $p > 5$, to obydwa czynniki są większe niż 1.

2. TAK lub NIE, NIE, NIE. Znowu mój błąd... Miały być dzielniki 3 lub 4 i wtedy pierwsza odpowiedź byłaby prawidłowa. Istotnie, liczylibyśmy wielokrotności 3 i 4: $[2011/3]+[2011/4]-[2011/12]$. Wyłączylibyśmy z tego wielokrotności 5, przy czym uważalibyśmy aby dwa razy nie policzyć wielokrotności 60: $[2011/15]+[2011/20]-[2011/60]$. Ostatecznie byłoby to: 670 + 502 - 167 - 134 - 100 + 33 = 804. A skoro były wielokrotności 3 i 4, to szukana liczba wynosiła znacznie mniej niż 800, bo zawierała jedynie wielokrotności 12... Przepraszam za tę pomyłkę.

3. NIE, NIE, TAK - zauważmy, że każda taka liczba jest postaci $\frac{x}{999}$ i ma parę: $\frac{999-x}{999}$. A skoro kombinacji dających cyfry okresu jest $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, to par sumujących się do 1 jest 360. Zatem odpowiedź to 360.

4. TAK, TAK, TAK Na mocy cechy kąt-kąt-kąt trójkąty $ADC$ oraz $BEC$ są podobne. Stąd
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|EC|} = \frac{2|DC|}{2|EC|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$
Zatem $|AC|^2 = |BC|^2 \Rightarrow |AC| = |BC|$.

5. NIE, NIE, TAK: jak to policzyć? Jeśli liczba $n$ ma zapis dziesiętny postaci 1abc, to w przypadku gdy a, b lub c jest równe 5, 6, 7, 8, to przy dodawaniu x + (x+1) przędzie konieczne przenoszenie. To jedna sprawa. Następny problem, to gdy $b = 9$, zaś $c \neq 9$ oraz gdy $a = 9$ i ani $b$, ani $c$ nie są równe 9. Również wtedy będzie przenoszenie. Innymi słowy, jeśli $x$ nie jest postaci opisanej wyżej, to jest czworakiego rodzaju:
$$1abc, \quad 1ab9, \quad 1a99, \quad 1999, \quad \{a,b,c\} \subseteq \{0,1,2,3,4\}.$$
Zatem mamy $5^3 + 5^2 + 5 + 1 = 156$ takich wartości $n$.

6. NIE, TAK, TAK. Dowodu wymaga jedynie punkt 2. Zauważmy, że $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$. Istotnie, jest to po wymnożeniu stronami równoważne nierówności trójkąta $a < b + c$. Stosując podobne oszacowania dla pozostałych ułamków widzimy, że $X < 2$. Łatwo pokazać, że stałej 2 nie można obniżyć.