Test, dzień pierwszy, grupa starsza

1. Suma pewnych dwóch liczb całkowitych wynosi 26. Jeśli dodamy do nich jeszcze dwie liczby całkowite dostajemy 41. Jeśli, wreszcie, dodamy jeszcze dwie liczby całkowite do czterech poprzednich, uzyskamy 57. Ile wynosi najmniejsza możliwa ilość liczb parzystych pośród 6 rozważanych liczb całkowitych?

.... Nie więcej niż 2.

.... Nie mniej niż 1.

.... Dokładnie 2.

2. Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ będzie listą pierwszych 10 liczb całkowitych dodatnich takich, że dla każdego $2 \leqslant i \leqslant 10$ albo $a_i + 1$, albo $a_i - 1$ albo obydwie te liczby występują na krórymś z miejsc poprzedzających a_i. Ile jest możliwości stworzenia takiej listy?

.... więcej niż 500

.... więcej niż 1000

.... dokładnie 1024

3. Wykonujemy rzut dwiema standardowymi kośćmi 6-ściennymi. Suma wyrzuconych liczb określa promień koła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość liczbowa pola otrzymanego w ten sposób koła będzie mniejsza niż wartość liczbowa okręgu tego koła?

.... $\frac{1}{36}$

.... $\frac{2}{24}$

.... $\frac{5}{18}$

4. Każdy wierzchołek pięciokąta wypukłego $ABCDE$ malujemy jednym z 6 różnych kolorów w ten sposób, że końce każdej przekątnej muszą mieć różne kolory. Ile różnych kolorowań jest możliwych?

.... Mniej niż 3000.

.... Więcej niż 2800.

.... Więcej niż 2900.

5. Załóżmy, że $|x + y| + |x - y| = 2$. Jaka jest maksymalna wartość wyrażenia $x^2 - 6x + y^2$?

.... Więcej niż 8.

.... Więcej niż 9.

.... Więcej niż 10.

6. Ile jest dwucyfrowych dzielników liczby $2^{24} - 1$?

.... 4

.... 10

.... 14

Test, dzień drugi, grupa starsza

1. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, niech $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. Jaka jest suma wszystkich wartości $f(n)$, które są liczbami pierwszymi?

.... 794

.... 798

.... 802

2. Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą taką, że $a^3 = 6(a+1)$. Wówczas równanie $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$

.... nie ma rozwiązań

.... ma pierwiastek podwójny

.... ma dwa różne rozwiązania

3. Tzw. „iteracyjna średnia" liczb 1, 2, 3, 4, 5 obliczana jest w następujący sposób. Ustawiamy liczby w pewnej kolejności. Znajdujemy średnią arytmetyczną pierwszych dwóch, potem średnią arytmetyczną uzyskanej liczby z trzecią z kolei liczbą, potem średnią tak uzyskanej liczby z czwartą liczbą i wreszcie średnią uzyskanej średniej z piątą liczbą według ustalonego porządku. Jaka jest różnica pomiędzy największą i najmniejszą z wartości jakie mogą być w ten sposób uzyskane?

.... Więcej niż 2

.... Więcej niż 1.5

.... Więcej niż 1.2

4. Wykres wielomianu $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ przecina oś OX w pięciu różnych punktach, w tym w punkcie $(0, 0)$. Stąd:

.... Współczynnik c musi być niezerowy.

.... Współczynnik d musi być niezerowy.

.... Współczynnik e musi być niezerowy.

5. Niech n będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią o tej własności, że jeśli przedstawimy 10^n w postaci dowolnego iloczynu dwóch liczb całkowitych dodatnich, to przynajmniej jeden z czynników ma w zapisie dziesiętnym cyfrę 0. Wówczas:

.... $n > 3$

.... $n > 5$

.... $n > 7$

6. W rozwinięciu wyrażenia $(ax + b)^{2000}$, gdzie a, b są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi dodatnimi, współczynniki stojące przy x^2 oraz x^3 są równe. Wówczas:

.... $a + b = 667$

.... $a + b = 1334$

.... $a + b = 2001$

Test, dzień trzeci, grupa starsza

1. Adam, Bronek, Czesio, Darek, Edek oraz Frania mają konta na znanym portalu społecznościowym. Niektórzy, ale nie wszyscy, są swoimi przyjaciółmi (jest to relacja symetryczna), ale żaden z nich nie ma przyjaciela poza tą grupą. Każdy z nich ma tyle samo przyjaciół. Ile jest różnych możliwych układów znajomości w tym internetowym gronie?

.... Więcej niż 165

.... Więcej niż 170

.... Więcej niż 175

2. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia, którą można przedstawić jako sumę dziewięciu kolejnych liczb całkowitych, sumę dziesięciu kolejnych liczb całkowitych oraz sumę jedenastu kolejnych liczb całkowitych?

.... 490

.... 495

.... 497

3. Równanie $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ma:

.... jedno rozwiązanie

.... skończenie wiele rozwiązań

.... nieskończenie wiele rozwiązań

4. Niech (a, b, c) będą liczbami nieparzystymi. Wówczas następujące fakty zachodzą dla poniższego równania: $\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}$.

.... a = b

.... istnieje skończenie wiele rozwiązań tego równania

.... istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego równania

5. Funkcja $f(x)$ spełnia równanie $f(2 + x) = f(2 - x)$, dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Jeśli równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie cztery różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4, wówczas suma tych czterech liczb jest równa:

.... 4

.... 8

.... 16

6. Dla pewnego m całkowitego, wielomian $x^3 - 2011x + m$ ma trzy pierwiastki całkowite a, b, c. Wówczas:

.... $|a| + |b| + |c| > 50$

.... $|a| + |b| + |c| > 100$

.... $|a| + |b| + |c| > 120$