ZADANIA OTWARTE - grupa starsza. Dzień pierwszy.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a-1, b-1$ i $c-1$ jest większy od 1. Pokaż, że $abc-1$ jest liczbą złożoną.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC. Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D. Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E. Pokaż, że $MD = NE$.

3. W trójkąt ostrokątny ABC wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki leżą na boku AB, zaś dwa pozostałe leżą na pozostałych bokach trójkąta. Wykaż, że pole tego kwadratu jest nie większe niż połowa pola trójkąta ABC.

4. Danych jest 70 różnych liczb całkowitych nie większych od 200. Wykaż, że pewne dwie liczby różnią się o 4, 5 lub 9.

5. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C różnym od punktu S. Pokaż, że $AB > 2CD$.

ZADANIA OTWARTE - grupa starsza. Dzień drugi.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Niech liczby całkowite a, b będą takie, że liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$. Uzasadnij, że wówczas $a + b$ dzieli liczbę b^2.

2. Okrąg o jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k styczna do okręgu o przecina boki BC i CD w punktach odpowiednio P i Q. Wykaż, że wartość iloczynu $BP \cdot DQ$ nie zależy od wyboru prostej k.

3. Danych jest ciąg $mn+1$ różnych liczb rzeczywistych, gdzie $m, n \geqslant 1$ są liczbami całkowitymi. Wykaż, że można z niego wybrać ściśle rosnący podciąg $m+1$ liczb rzeczywistych lub ściśle malejący podciąg $n + 1$ liczb rzeczywistych.

4. Pająk i mucha siedzą w naprzeciwległych wierzchołkach sześcianu. W pewnym momencie pająk postanowił upolować muchę. Może on poruszać się jedynie po powierzchni sześcianu. Jaką drogę do muchy, która się nie porusza, powinien wybrać, aby przebyć jak najmniejszy dystans? Ile wyniesie ta droga?

5. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 20^o.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od każdej z krawędzi AS, BS i CS.

ZADANIA OTWARTE - grupa starsza. Dzień trzeci.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Rozstrzygnij, czy istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $6^n - 1 | 7^n - 1$.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą następujące równości kątów: $\angle ABD = \angle BAD = 60^o$ i $\angle BCD = 120^o$. Pokaż, że $BC + DC = AC$.

3. Banknot przykryto 25 monetami o promieniu 2. Czy jest możliwe przykrycie go 100 monetami o promieniu 1?

4. Rozłączne okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie do okręgu O w punktach odpowiednio S i T. Prosta ℓ, nierozdzielająca okręgi O_1 i O_2, jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q. Wykaż, że proste SP i TQ przecinają się w punkcie leżącym na okręgu O.

5. Punkty A, B, C leżą na prostej w danej kolejności, przy czym $AB < BC$. Punkty D i E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q, przy czym P leży na odcinku DE. Niech R będzie punktem przecięcia odcinków AQ i BD. Wykaż, że $DP = DR$.