IV Warsztaty Matematyczne

I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Zadania i rozwiązania. Grupa starsza.

Dzień trzeci – 29.09.2010r.

Streszczenie

Przygotowując zadania opierałem się o zasoby zadaniowe pochodzące z następujących źródeł:

- Olimpiada Matematyczna (www.om.edu.pl)
- Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej (www.om.edu.pl)
- Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl)
- American Invitational Mathematics Examination (http://www.artofproblemsolving.com)
- Norway Niels Henrik Abels Math Contest (http://www.artofproblemsolving.com)
- „103 trigonometry problems"; Titu Andreescu, Zuming Feng; Birkhuser 2005.
- Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (http://cut-the-knot.org)

Część I

Zadania

Test, dzień trzeci, grupa starsza

1. Dane są liczby rzeczywiste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ z przedziału $[-1, 1]$ takie, że $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Wówczas:

.... $\sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i^3 x_j^3 = 0$

.... $x_1^9 + x_2^9 + \ldots + x_n^9 = 0$

.... $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$

2. Niech $1 < x < y$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

.... Istnieje nieskończenie wiele takich par x, y, że $\frac{y}{x}, \frac{y+1}{x+1}$ są całkowite.

.... Istnieje nieskończenie wiele takich par x, y, że $\frac{y}{x}, \frac{y+1}{x+1}, \frac{y+2}{x+2}$ są całkowite.

.... Istnieje nieskończenie wiele takich par x, y, że $\frac{y}{x}, \frac{y+1}{x+1}, \frac{y+2}{x+2}, \frac{y+3}{x+3}$ są całkowite.

3. Każdą liczbę całkowitą k można w sposób jednoznaczny przedstawić w tzw. bazie silni, tzn. istnieją takie liczby $f_1, f_2, \ldots, f_m$, że $0 \leqslant f_i < i$ oraz $0 < f_m$ i:

$$k = f_1 \cdot 1! + f_2 \cdot 2! + f_3 \cdot 3! + \ldots + f_m \cdot m!.$$

Mówimy, że liczba k jest wtedy m-silniacyfrowa. Wówczas:

.... iloczyn liczb jedno-silniacyfrowych może być jedno-silniacyfrowy

.... iloraz liczb jedno-silniacyfrowych może być jedno-silniacyfrowy

.... kwadrat liczby jedno-silniacyfrowej może być jedno-silniacyfrowy

4. Dany jest czworokąt ABCD, w którym $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d, |AC| = e, |BD| = f$. Wówczas:

.... pole tego czworokąta wynosi nie więcej niż $\frac{ab+cd}{2}$

.... pole tego czworokąta wynosi nie więcej niż $\frac{ac+bd}{2}$

.... pole tego czworokąta wynosi nie więcej niż $\frac{ef}{2}$.

5. Sześcian przecięto płaszczyzną, która podzieliła go na dwie bryły o równej objętości. Czy powstały w ten sposób przekrój sześcianu może być:

.... czworokątem

.... pięciokątem

.... sześciokątem

6. Niech f będzie funkcją, która dla wszystkich liczb całkowitych x, y spełnia następującą równość:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 6xy + 1.$$

Wiadomo dodatkowo, że $f(x) = f(-x)$. Wówczas $f(3)$ jest równe:

.... 26

.... 52

.... 54

Konkurs, dzień trzeci, grupa starsza

1. Czy z kwadratowej kartki papieru o wymiarach $7,99 \times 7,99$ da się wyciąć 50 kwadratów 1×1?

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ mamy $AB = AD$ oraz $\langle DAB = 60^\circ$. Niech E będzie punktem wewnętrz tego czworokąta. Udowodnić, że $DE + BE + CE \geqslant AC$.

3. Przez punkt ciężkości trójkąta ABC prowadzimy prostą, która przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że:
$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

4. Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie?

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków?

Część II

Rozwiązania

Test, dzień trzeci, grupa starsza

1. Dane są liczby rzeczywiste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ z przedziału $[-1, 1]$ takie, że $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Wówczas:

.... $\sum_{i,j=1}^{n} x_i^3 x_j^3 = 0$

.... $x_1^9 + x_2^9 + \ldots + x_n^9 = 0$

.... $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$

Odpowiedź:

- TAK, $\sum_{i,j=1}^{n} x_i^3 x_j^3 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3)^2 = 0$.
- NIE,
- TAK, dokonajmy postawienia $\sin(y_i) = x_i$. Wyprowadzamy wzór na $\sin(3y_i)$. Jest to:

$$\sin(3y_i) = \sin(y_i)\cos(2y_i) + \sin(2y_i)\cos(y_i) = \sin(y_i)(\cos^2(y_i) - \sin^2(y_i)) + 2\sin(y_i)\cos^2(y_i).$$

Po uproszczeniu prawa strona ma postać: $3\sin(y_i) - 3\sin(y_i)^3$. Zatem z warunku mamy:

$$3(\sum(\sin(y_i))) - \sum(\sin(3y_i)) = 0.$$

Oznacza to, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant n/3$.

2. Niech $1 < x < y$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

.... Istnieje nieskończenie wiele takich par x, y, że $\frac{y}{x}, \frac{y+1}{x+1}$ są całkowite.

.... Istnieje nieskończenie wiele takich par x, y, że $\frac{y}{x}, \frac{y+1}{x+1}, \frac{y+2}{x+2}$ są całkowite.

.... Istnieje nieskończenie wiele takich par x, y, że $\frac{y}{x}, \frac{y+1}{x+1}, \frac{y+2}{x+2}, \frac{y+3}{x+3}$ są całkowite.

Odpowiedź:

- TAK,
- TAK,
- TAK, zauważmy, że $2|122, 3|123, 4|124, 5|125$. Zatem każda liczba y, że $y + 1 = 0 \bmod 3$ oraz $y = 122 \bmod 1000$ oraz $x = 2$ jest dobrą parą.

3. Każdą liczbę całkowitą k można w sposób jednoznaczny przedstawić w tzw. bazie silni... Wówczas:

.... iloczyn liczb jedno-silniacyfrowych może być jedno-silniacyfrowy

.... iloraz liczb jedno-silniacyfrowych może być jedno-silniacyfrowy

.... kwadrat liczby jedno-silniacyfrowej może być jedno-silniacyfrowy

Odpowiedź: zgodnie z definicją nie istnieje liczba jednosilniacyfrowa, więc każda wypowiedź o niej jest prawdziwa...

- TAK, NIE
- TAK, NIE
- TAK, NIE

4. Dany jest czworokąt ABCD, w którym $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d, |AC| = e, |BD| = f$. Wówczas:

.... pole tego czworokąta wynosi nie więcej niż $\frac{ab+cd}{2}$

.... pole tego czworokąta wynosi nie więcej niż $\frac{ac+bd}{2}$

.... pole tego czworokąta wynosi nie więcej niż $\frac{ef}{2}$.

Odpowiedź:

- TAK, łatwe
- TAK, korzystając z c i z tw. Ptolemeusza.
- TAK, łatwe

5. Sześcian przecięto płaszczyzną, która podzieliła go na dwie bryły o równej objętości. Czy powstały w ten sposób przekrój sześcianu może być:

.... czworokątem

.... pięciokątem

.... sześciokątem

Odpowiedź (IV OMG, etap 2, zadanie 5): Zauważmy, że płaszczyzna ta musi przechodzić przez środek sześcianu (i każda przechodząca przez środek dzieli sześcian na bryły równej objętości). Istotnie, jeśli do wyjściowej poprowadzimy płaszczyznę równoległą idącą przez środek sześcianu, to odległość między nimi musi wynieść 0. Przekrój wyjściową płaszczyzną musi mieć zatem środek symetrii. Nie może być to pięciokąt. Czworokąt i sześciokąt są możliwe.

- TAK, łatwe
- TAK, korzystając z c i z tw. Ptolemeusza.
- TAK, łatwe

6. Niech f będzie funkcją, która dla wszystkich liczb całkowitych x, y spełnia następującą równość:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 6xy + 1.$$

Wiadomo dodatkowo, że $f(x) = f(-x)$. Wówczas $f(3)$ jest równe:

.... 26

.... 52

.... 54

Odpowiedź: Można sprawdzić, że równanie to spełnia jedynie funkcja $6x^2 + 1$. Ale nam nie jest to potrzebne. Mamy: $f(0) = 2f(0)+1$, zatem $f(0) = -1$. Ale $f(0) = f(3)+f(-3)-54+1 = 2f(3)-53$, zatem $f(3) = 26$.

- TAK
- NIE
- NIE

1. **Czy z kwadratowej kartki papieru o wymiarach $7,99 \times 7,99$ da się wyciąć 50 kwadratów 1×1?**

Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2008, DD 5):

Tak. Weźmy kwadrat o boku $\frac{11}{\sqrt{2}} < 7.99$. Długość jego przekątnej to 11. W nim można umieścić 50 kwadratów jednostkowych.

2. **W czworokącie wypukłym $ABCD$ mamy $AB = AD$ oraz $\langle\, DAB = 60°$. Niech E będzie punktem wewnętrz tego czworokąta. Udowodnić, że $DE + BE + CE \geqslant AC$.**

Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2010, ŁZG 7):

Z warunków zadania wynika, że trójkąt ABD jest równoboczny. Stosując nierówność Ptolemeusza do czworokąta $ABED$ dostajemy:

$$AE \cdot BD \leqslant AB \cdot DE + BE \cdot AD$$

i po uwzględnieniu równości $BD = AB = AD$ widzimy, że $AE \leqslant DE + BE$. Zatem na mocy nierówności trójkąta dla punktów B, E, D uzyskujemy:

$$DE + BE + CE \geqslant AE + CE \geqslant AC.$$

3. **Przez punkt ciężkości trójkąta ABC prowadzimy prostą, która przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że:**

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

Rozwiązanie (Cut The Knot):

Niech M_a będzie środkiem odcinka BC. Niech punkty D, E, F będą rzutami punktów B, M_a, C na prostą MN. Wówczas:

$$M_aE = \frac{BD + CF}{2}.$$

NIech L będzie rzutem punktu A na MN. Trójkąty ALG oraz M_aEG są podobne i $GA = 2M_aG$. Stąd $LA = 2M_aE$. Inaczej mówiąc:

$$LA = BD + CF.$$

Trójkąty BDM i ALM są podobne. Podobnie trójkąty CFN i ALN. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{BD}{LA} + \frac{CF}{LA} = 1.$$

4. **Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie?**

Rozwiązanie (V OMG, III Etap, Zadanie 5):

Taki wielościan istnieje. Rozpatrzmy graniastosłup prawidłowy o podstawach $A_1A_2\ldots A_{99}$ oraz $B_1B_2\ldots B_{99}$ i krawędziach bocznych $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_{99}B_{99}$. Następnie weźmy pod uwagę płaszczyznę, która przechodzi przez punkty A_1 i A_2 oraz przecina krawędzie $A_3B_3, \ldots A_{99}B_{99}$. Płaszczyzna ta rozcina dany graniastosłup na dwa wielościany, z których jeden – ten, który zawiera ścianę $A_1A_2\ldots A_{99}$ – spełnia warunki zadania. Posiada on dokładnie 100 ścian, ścianę będącą 99-kątem oraz w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie.

5. **Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków?**

Rozwiązanie (IV OMG, Etap III, Zadanie 5):

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję. Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawami są sześciokąty $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$, a krawędziami bocznymi są $AA', BB', CC', DD', EE', FF'$. Następnie prowadzimy przez punkty $A'D'$ płaszczyznę, która rozcina BB' oraz CC' odpowiednio w punktach P i Q. Płaszczyzna ta rozcina graniastosłup na dwa wielościany. Jeden z nich ma 8 ścian będących czworokątami i jedną ścianę będącą sześciokątem, a więc wszystkie jego ściany mają parzystą liczbę boków. Ponadto wielościan ten ma 19, czyli nieparzystą liczbę krawędzi.