IV Warsztaty Matematyczne

I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Zadania i rozwiązania. Grupa starsza.

Dzień pierwszy – 27.09.2010r.

Streszczenie

Przygotowując zadania opierałem się o zasoby zadaniowe pochodzące z następujących źródeł:

- Olimpiada Matematyczna (www.om.edu.pl)
- Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej (www.om.edu.pl)
- Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl)
- American Invitational Mathematics Examination (http://www.artofproblemsolving.com)
- Norway Niels Henrik Abels Math Contest (http://www.artofproblemsolving.com)
- „103 trigonometry problems"; Titu Andreescu, Zuming Feng; Birkhuser 2005.
- Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (http://cut-the-knot.org)

Część I

Zadania

Test, dzień pierwszy, grupa starsza

1. Nierówność

$$a^a \cdot b^b \geqslant a^b \cdot b^a$$

.... jest prawdziwa dla dowolnych $a \geqslant b \geqslant 1$.

.... jest prawdziwa dla dowolnych $1 \geqslant b \geqslant a > 0$.

.... jest nieprawdziwa dla pewnych $a, b > 0$.

2. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas:

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p^2 przez 4.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p^3 przez 8.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p^4 przez 16.

3. Załóżmy, że długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$ równe są długościom środkowych trójkąta ABC. Wówczas:

.... długości boków trójkąta ABC równe są długościom środkowych w $A_1B_1C_1$.

.... stosunek długości boków trójkąta ABC do długości środkowych w $A_1B_1C_1$ wynosi 2:3.

.... stosunek długości boków trójkąta ABC do długości środkowych w $A_1B_1C_1$ wynosi 3:4.

4. Załóżmy, że dany jest trójkąt ABC, w którym długości środkowych s_a, s_b, s_c spełniają równość $s_a^2 + s_b^2 = 5s_c^2$. Wówczas:

.... trójkąt ten jest równoramienny.

.... trójkąt ten jest prostokątny.

.... trójkąt ten jest prostokątny równoramienny.

5. Liczby dodatnie a, b, x, y spełniają równości $a^2 + x = b^2 + y$ oraz $a + x^2 = b + y^2$, a także nierówność $a + b + x + y < 2$. Wynika stąd, że:

.... a = b

.... x = y

.... a = x

6. Niech (a, b, c) będą liczbami nieparzystymi. Rozważmy równanie:

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

Możemy stwierdzić, że:

.... a = b

.... istnieje skończenie wiele rozwiązań tego równania

.... istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego równania

Konkurs, dzień pierwszy, grupa starsza

1. Znudzony uczeń przechadza się korytarzem szkolnym, który zawiera rząd szafek (jak w amerykańskich serialach ;) ponumerowanych od 1 do 1024. Szafki są pozamykane, ale nie na klucz, tak więc uczeń może je zamykać i otwierać. Idzie więc i otwiera szafkę nr 1. Następną zostawia zamkniętą, następną otwiera i tak aż do końca korytarza. Potem zawraca i otwiera pierwszą zamkniętą jeszcze szafkę. Potem następną (jeszcze) zamkniętą zostawia, następną zamkniętą otwiera itd. Idzie tak tam, i z powrotem, aż otworzy wszystkie szafki. Jaki będzie numer szafki jaką otworzy na końcu?

2. Ahmed i Fredek grają w grę na szachownicy 7×7. Ahmed stawia kółka, a Fredek krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym jest krzyżyk. Zaczyna Ahmed. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gdy gracz nie może wykonać ruchu, to traci go. Gra kończy się, gdy żaden z graczy nie może wykonać ruchu. Grę wygrywa ten gracz, który wykonał więcej ruchów. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywającą.

3. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło 2n zawodników. Kazdy zawodnik rozegrał z kazdym innym zawodnikiem co najwyzej jeden mecz. Po turnieju okazało sie, ze dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których taka sytuacja jest mozliwa.

4. W warsztatach matematycznych uczestniczy 2010 osób. Organizatorzy nie chcą, żeby chodzili oni po szkole w zbyt małych grupach. Stąd też wszyscy zostali zamknięci w auli. Zamontowano też nowe zamki w auli i rozdano każdemu uczestnikowi pewną liczbę kluczy tak, aby dowolnych 2009 uczestników mogło otworzyć aulę, ale także aby żadnych 2008 uczestników nie było w stanie otworzyć auli. Ile co najmniej zamków trzeba zamontować w auli?

5. Mustafa rzuca monetą 2010 razy, zaś Ahmed 2011 razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ahmed wyrzuci więcej orłów niż Mustafa.

Część II

Rozwiązania

Test, dzień pierwszy, grupa starsza

1. Nierówność

$$a^a \cdot b^b \geqslant a^b \cdot b^a$$

.... jest prawdziwa dla dowolnych $a \geqslant b \geqslant 1$.

.... jest prawdziwa dla dowolnych $1 \geqslant b \geqslant a > 0$.

.... jest nieprawdziwa dla pewnych $a, b > 0$.

Odpowiedź:

- TAK,
- TAK,
- NIE, nierówność jest równoważna temu, że $(a/b)^{a-b} \geqslant 1$. Łatwo sprawdzić, że jest to spełnione dla dowolnych liczb dodatnich.

2. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas:

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p^2 przez 4.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p^3 przez 8.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p^4 przez 16.

Odpowiedź:

- NIE, istnieje jedna reszta: 1.
- NIE, istnieją trzy reszty: 1, 3, -3.
- NIE, istnieje jedna reszta: 1. Na podstawie A wystarczy sprawdzić, że nie istnieje p, że $p^2 = 5 \mod 16$.

3. Załóżmy, że długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$ równe są długościom środkowych trójkąta ABC. Wówczas:

.... długości boków trójkąta ABC równe są długościom środkowych w $A_1B_1C_1$.

.... stosunek długości boków trójkąta ABC do długości środkowych w $A_1B_1C_1$ wynosi 2:3.

.... stosunek długości boków trójkąta ABC do długości środkowych w $A_1B_1C_1$ wynosi 3:4.

Odpowiedź: Jest to liczba > 1. Dokładniej 4:3.

- NIE,
- NIE,
- NIE,

4. Załóżmy, że dany jest trójkąt ABC, w którym długości środkowych s_a, s_b, s_c spełniają równość $s_a^2 + s_b^2 = 5s_c^2$. Wówczas:

.... trójkąt ten jest równoramienny.

.... trójkąt ten jest prostokątny.

.... trójkąt ten jest prostokątny równoramienny.

Odpowiedź: Musi to być trójkąt prostokątny. Łatwo wyliczyć, że długość $s_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$. Podstawiajac to do równości wyżej dostajemy twierdzenie Pitagorasa.

- NIE,
- TAK,
- TAK,

5. Liczby dodatnie a, b, x, y spełniają równości $a^2 + x = b^2 + y$ oraz $a + x^2 = b + y^2$, a także nierówność $a + b + x + y < 2$. Wynika stąd, że:

.... a = b

.... x = y

.... a = x

Odpowiedź: Mamy $a^2 - b^2 = y - x$ oraz $a - b = y^2 - x^2$. Stąd $(a + b)(y^2 - x^2) = y - x$. Gdyby było tak, że $y \neq x$, to mamy $(a + b)(y + x) = 1$. Jest to sprzeczne z nierównością $a + b + x + y < 2$ (nierówność między średnimi). Zatem y = x. Łatwo wywnioskować też, że $a = b$. Trzecia równość nie musi mieć miejsca.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

6. Niech (a, b, c) będą liczbami nieparzystymi. Rozważmy równanie:

$$\frac{a + c - b}{b + c - a} = \frac{a}{b}.$$

Możemy stwierdzić, że:

.... a = b

.... istnieje skończenie wiele rozwiązań tego równania

.... istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego równania

Odpowiedź: Wymnażamy i mamy: $(b - a)c = b^2 - a^2$. Jeśli $a \neq b$, to mamy $c = a + b$. Sprzeczność z nieparzystością c. Zatem $a = b$.

- TAK,
- NIE
- TAK.

1. **Znudzony uczeń przechadza się korytarzem szkolnym, który zawiera rząd szafek (jak w amerykańskich serialach ;) ponumerowanych od 1 do 1024. Szafki są pozamykane, ale nie na klucz, tak więc uczeń może je zamykać i otwierać. Idzie więc i otwiera szafkę nr 1. Następną zostawia zamkniętą, następną otwiera i tak aż do końca korytarza. Potem zawraca i otwiera pierwszą zamkniętą jeszcze szafkę. Potem następną (jeszcze) zamkniętą zostawia, następną zamkniętą otwiera itd. Idzie tak tam, i z powrotem, aż otworzy wszystkie szafki. Jaki będzie numer szafki jaką otworzy na końcu?**

   Rozwiązanie (AIME, 1996, zadanie 9):

   Gdy uczeń przechodzi otwiera wszystkie szafki o numerach parzystych. Zostają więc same nieparzyste. Przy następnym przejściu otwiera wielokrotności 4, a więc otwarte zostają jedynie zamki o numerach dających przy dzieleniu przez 4 resztę 2. Innymi słowy są to zamki o numerach dających przy dzieleniu przez 8 reszty 2 i 6. Przy kolejnym przejściu uczeń otwiera zatem wszystkie zamki o reszcie 2. Zostają reszty 6 z dzielenie przez 8. Są to jednocześnie reszty 6 i 14 przy dzieleniu przez 16. Otwiera te te ostatnie (bo akurat idzie z powrotem). Potem ma zamki o resztach 6 i 22 z dzielenia przez 32, otwiera te o reszcie 6 i zostają mu reszty 22 i 54 z dzielenia przez 64. Otwiera 54 i zostają reszty 22 i 86 z dzielenia przez 128. Otwiera reszty 22 i zostają mu reszty 86 i 214 z dzielenia przez 256. Otwiera te ostatenie i zostają mu numery 86, 342, 598 i 854. Otwiera 86 i 598, potem 854, a więc został mu już tylko numer 342, który otwiera jako ostatni.

2. **Ahmed i Fredek grają w grę na szachownicy 7×7. Ahmed stawia kółka, a Fredek krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym jest krzyżyk. Zaczyna Ahmed. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gdy gracz nie może wykonać ruchu, to traci go. Gra kończy się, gdy żaden z graczy nie może wykonać ruchu. Grę wygrywa ten gracz, który wykonał więcej ruchów. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywającą.**

   Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2008, zadanie 21):

   Ponieważ gra jest skończona i każda rozgrywka kończy się wygraną któregoś z graczy, to istnieje gracz posiadający strategię wygrywającą. Udowodnimy, że strategię tę posiada gracz zaczynający, Ahmed. Przypuśćmy nie wprost, że strategię wygrywającą posiada Fredek. Wskażemy teraz strategię dla Ahmeda, którą grając przeciw Fredkowi może z nim wygrać. Zauważmy na początek, że własny znak nigdy nie przeszkadza graczowi w realizowaniu jakiejkolwiek stategii. Ahmed stawia na początek kółko gdziekolwiek. Następnie stawia się w sytuacji drugiego gracza, zapomina o postawionym kółku i gra wygrywającą strategią drugiego gracza. Jeżeli strategia ta każe postawić kółko w tym miejscu, gdzie już stoi pierwsze kółko to, ponieważ kółko już tam jest, to Ahmed stawia kółko w dowolnym innym miejscu (i zapomina o nim). W ten sposób pokazaliśmy, że Ahmed, kopiując strategię drugiego gracza może wygrać, czyli doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że Fredek ma strategię wygrywającą. Zatem strategię wygrywającą posiada Ahmed.

3. **W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło 2n zawodników. Kazdy zawodnik rozegrał**

z kazdym innym zawodnikiem co najwyzej jeden mecz. Po turnieju okazało sie, ze dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których taka sytuacja jest mozliwa.

Rozwiązanie (IV OMG, etap III, zadanie 2):

Zauważmy, że skoro n zawodników rozegrało po 2 mecze, a n po 3 mecze, to łączna liczba meczów w turnieju wynosi $5n/2$. Widać więc, że n musi być liczbą parzystą. Wykażemy teraz, że dla $n = 2k$ zawodników $A_1, A_2, \dots, A_{4k}$ można zaplanować mecze tak, aby spełnione były warunki zadania. Przyjmujemy po pierwsze, że zawodnik A_1 gra z A_2, dalej A_2 gra z A_3 itd. aż A_{4k} zagra z A_1. Ponadto A_1 gra z A_{2k+1}, A_3 gra z A_{2k+3}, $\dots$ A_{2k-1} graz z A_{4k-1}. W ten sposób każdy z zawodników $A_2, A_4, \dots, A_{4k}$ rozegrał dokładnie 2 mwcze, a każdy z pozostałych zawodników $A_1, A_3, \dots, A_{4k-1}$ rozegrał dokładnie trzy mecze.

4. **W warsztatach matematycznych uczestniczy 2010 osób. Organizatorzy nie chcą, żeby chodzili oni po szkole w zbyt małych grupach. Stąd też wszyscy zostali zamknięci w auli. Zamontowano też nowe zamki w auli i rozdano każdemu uczestnikowi pewną liczbę kluczy tak, aby dowolnych 2009 uczestników mogło otworzyć aulę, ale także aby żadnych 2008 uczestników nie było w stanie otworzyć auli. Ile co najmniej zamków trzeba zamontować w auli?**

Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2006, ID 1):

Skoro żadnych 2008 uczestników nie jest w stanie otworzyć auli, to dla dwóch osób istnieje zamek, do którego klucze mają co najwyżej te 2 osoby. Ponieważ każde 2009 osób może otworzyć aulę, to nie ma zamka, do którego klucz posiada tylko jedna osob. Zatem najmniejsza ilość zamków jest równa liczbie par osób wśród 2010 uczestników warsztatów, czyli $\binom{2010}{2}$.

5. **Mustafa rzuca monetą 2010 razy, zaś Ahmed 2011 razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ahmed wyrzuci więcej orłów niż Mustafa.**

Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2008, DD 7):

Zauważmy, że skoro Ahmed rzucał monetą 2011 razy, a Mustafa 2010 razy, to Ahmed wyrzucił albo więcej orłów albo więcej reszek niż Mustafa. Jednocześnie, nie mógł wyrzucić zarówno więcej orłów jak i reszek niż Mustafa, gdyż wówczas rzucałby przynajmniej o dwa rzuty więcej. Zatem dokładnie jeden z dwóch wyników (orły lub reszki) został wyrzucony przez Ahmeda więcej razy niż przez Mustafę. Ponieważ orły i reszki są symetryczne, to prawdopodobieństwo, że Ahmed wyrzucił więcej orłów niż Mustafa wynosi 1/2.