IV Warsztaty Matematyczne

I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Zadania i rozwiązania. Grupa starsza.

Dzień drugi – 28.09.2010r.

Streszczenie

Przygotowując zadania opierałem się o zasoby zadaniowe pochodzące z następujących źródeł:

- Olimpiada Matematyczna (www.om.edu.pl)
- Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej (www.om.edu.pl)
- Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl)
- American Invitational Mathematics Examination (http://www.artofproblemsolving.com)
- Norway Niels Henrik Abels Math Contest (http://www.artofproblemsolving.com)
- „103 trigonometry problems"; Titu Andreescu, Zuming Feng; Birkhuser 2005.
- Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (http://cut-the-knot.org)

Część I

Zadania

Test, dzień drugi, grupa starsza

1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC i punkty P, Q, R leżące odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Niech o_1, o_2, o_3 będą okręgami opisanymi odpowiednio na trójkątach AQR, CPQ, BPR. Wówczas $o_1 \cap o_2 \cap 0_3 \neq \emptyset$, gdy:

.... P, Q, R są środkami odpowiednich boków trójkąta ABC

.... $\frac{AQ}{QC} = \frac{CP}{PB} = \frac{BR}{RA}$

.... zawsze

2. W trójkącie ABC spełnione są równości:

$$3\sin(A) + 4\cos(B) = 6 \quad 4\sin(B) + 3\cos(A) = 1.$$

Wówczas miara kąta C wynosi:

.... $30°$

.... $45°$

.... $60°$

3. W trójkącie ABC spełniona jest nierówność:

$$\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) \leqslant 1.$$

Wynika stąd, że:

.... jeden z kątów trójkąta jest większy od $90°$

.... jeden z kątów trójkąta jest większy od $120°$

.... jeden z kątów trójkąta jest większy od $150°$

4. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Niech $X = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Wówczas:

.... $X < 3$

.... $X < 2$

.... $X < 1$

5. Równanie $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ma:

.... jedno rozwiązanie

.... skończenie wiele rozwiązań

.... nieskończenie wiele rozwiązań

6. Rozważmy wielomian postaci $x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \ldots$ Wówczas w zależności od n i od pozostałych współczynników, wielomian ten może:

.... nie mieć rozwiązań

.... mieć przynajmniej jedno rozwiązanie

.... mieć n rozwiązań

Konkurs, dzień drugi, grupa starsza

1. Ktoś zaobserwował, że $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$. Znajdź największą liczbę dodatnią n, dla której $n!$ może być przedstawione jako iloczyn $n-3$ kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

2. Mając daną liczbę wymierną większą od 0, zapiszmy ją jako ułamek nieskracalny $q = \frac{a}{b}$. Oblicz ile liczb wymiernych z przedziału $(0, 1)$ ma tę własność, że iloczyn ab równy jest $20!$

3. Liczbę naturalną n nazywamy wypasioną, jeżeli dla każdej liczby pierwszej p dzielącej n liczba p^2 również dzieli n. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że n oraz $n+1$ są wypasione.

4. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.

5. Wyznaczyć największą taką liczbę parzystą, której nie da się przedstawić jako sumy dwóch liczb nieparzystych złożonych.

Część II

Rozwiązania

Test, dzień drugi, grupa starsza

1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC i punkty P, Q, R leżące odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Niech o_1, o_2, o_3 będą okręgami opisanymi odpowiednio na trójkątach AQR, CPQ, BPR. Wówczas $o_1 \cap o_2 \cap 0_3 \neq \emptyset$, gdy:

.... P, Q, R są środkami odpowiednich boków trójkąta ABC

.... $\frac{AQ}{QC} = \frac{CP}{PB} = \frac{BR}{RA}$

.... zawsze

Odpowiedź:

- TAK,
- TAK,
- TAK.

2. W trójkącie ABC spełnione są równości:

$$3\sin(A) + 4\cos(B) = 6 \quad 4\sin(B) + 3\cos(A) = 1.$$

Wówczas miara kąta C wynosi:

.... 30°

.... 45°

.... 60°

Odpowiedź: Podnosimy obydwie równości do kwadratu, dodajemy stronami, upraszczamy jedynki i dostajemy: $12(sin(A+B)) = 24$. Stąd wynika, że jedyną możliwą odpowiedzią jest A. Można łatwo sprawdzić, że kąt 150 nie pasowałby. Wynika to z poszczególnych równości. Gdyby $A < 30$, to $3\sin(A) + 4\cos(B) < 3/2 + 4 < 6$.

- TAK,
- NIE
- NIE

3. W trójkącie ABC spełniona jest nierówność:

$$\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) \leqslant 1.$$

Wynika stąd, że:

.... jeden z kątów trójkąta jest większy od 90°

.... jeden z kątów trójkąta jest większy od 120°

.... jeden z kątów trójkąta jest większy od 150°

Odpowiedź: Niech $A \geqslant B \geqslant C$. Naprzeciw A leży a, naprzeciw B leży bok b, naprzeciw C bok c. Wówczas $a \geqslant b \geqslant c$. Z nierówności trojkąta mamy $b+c > a$. Z twierdzenia sinusów wynika zatem, że $\sin(B) + \sin(C) > \sin(A)$. Zatem $\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) > 2\sin(A)$. Wynika stąd, że $\sin(A) < \frac{1}{2}$. Jest to największy kąt, a więc $A > 150°$.

- TAK,
- TAK
- TAK

4. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Niech $X = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Wówczas:

.... $X < 3$

.... $X < 2$

.... $X < 1$

Odpowiedź: dowodu wymaga jedynie b. Zauważmy, że $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$. Istotnie, jest to po wymnożeniu stronami równoważne nierówności $a < b+c$. Stosując podobne oszacowania dla pozostałych ułamków widzimy, że $X < 2$. Łatwo pokazać, że stałej 2 nie można obniżyć.

- TAK,
- TAK
- NIE

5. Równanie $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ma:

.... jedno rozwiązanie

.... skończenie wiele rozwiązań

.... nieskończenie wiele rozwiązań

Odpowiedź: zauważmy, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a(b + c + d) = (a/2 - b)^2 + (a/2 - c)^2 + (a/2 - d)^2 + (a/2)^2 = 0.$$

- TAK,
- TAK
- NIE

6. Rozważmy wielomian postaci $x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \ldots$ Wówczas w zależności od n i od pozostałych współczynników, wielomian ten może:

.... nie mieć pierwiastków

.... mieć przynajmniej jeden pierwiastek

.... mieć n pierwiastków

Odpowiedź:

- TAK, dla $n = 2$ mamy $x^2 + 4x + 8$, który nie ma pierwiastków.
- TAK, dla każdego wielomianu nieparzystego stopnia
- TAK, np. dla funkcji liniowej, ale zauważmy, że gdyby n¿1 i istniało n pierwiastków, to na mocy wzorów Viete'a dostalibyśmy:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - \ldots = 4n^2 - 4n^2 = 0.$$

  A jeśli $n > 1$, to wielomian nie jest postaci x^n.

1. **Ktoś zaobserwował, że $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$. Znajdź największą liczbę dodatnią n, dla której $n!$ może być przedstawione jako iloczyn $n-3$ kolejnych liczb całkowitych dodatnich.**

Rozwiązanie (AIME):

Załóżmy, że dane jest $n!$ będące iloczynem $n-3$ kolejnych liczb naturalnych. Oznaczmy największą z nich przez k. Jest jasne, że $k > n$. Jeśli $k = n+1$, wówczas iloczyn $5 \cdot 6 \ldots n \cdot (n+1)$ jest $(n+1)/24$ razy większy od $n!$. Dla $n = 23$ mamy zatem równość. Jeśli $n > 23$, to $n+1 > 24$ i nie będzie równości.

Ogólniej, gdy $k = n + q$, wówczas mamy warunek, że iloczyn $(4 + q) \cdot (5 + q) \cdot \ldots \cdot (n + q)$ jest $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}{(q+3)!}$ większy od $n!$. Oznacza to, że aby istniało n będące iloczynem $n - 3$ kolejnych liczb, z których największą jest $k = n + q$, musi zachodzić równość:

$$(q + 3)! = (n + 1)(n + 2) \ldots (n + q).$$

Twierdzimy, że wówczas $n < 23$. W przeciwnym razie:

$$(q + 3)! \geqslant (23 + 1)(23 + 2) \ldots (23 + q) = \frac{(q + 23)!}{23!}.$$

Innymi słowy:

$$(q + 3)!23! \geqslant (q + 23)!$$

Równoważnie:

$$23! \geqslant (q + 4)(q + 5) \ldots (q + 23).$$

Dla $q > 1$ powyższa nierówność nie może mieć miejsca. Istotnie, wówczas:

$$23! \geqslant (q + 4)(q + 5) \ldots (q + 23) \geqslant 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 25 = \frac{25!}{5!}.$$

Ostatecznie więc:

$$5! = 120 \geqslant 24 \cdot 25.$$

Ostatnia nierówność jest jednak nieprawdziwa. Zatem istotnie gdy $q > 1$, wtedy $n < 23$. Szukaną liczbą jest zatem 23.

2. **Mając daną liczbę wymierną większą od 0, zapiszmy ją jako ułamek nieskracalny $q = \frac{a}{b}$. Oblicz ile liczb wymiernych z przedziału $(0, 1)$ ma tę własność, że iloczyn ab równy jest $20!$**

Rozwiązanie (AIME):

Przypomnijmy, że jeśli dana jest liczba pierwsza p i liczba naturalna n, to przez $ord_p(n)$ oznaczamy taką liczbę k, że $p^k \mid n$, ale $p^{k+1} \nmid n$. Wiadomo, że jeśli dana jest liczba pierwsza p taka, że $p \mid 20!$ i taka, że $ord_p(20!) = k$, to albo $p^k \mid a$ albo $p^k \mid b$. Inaczej a, b nie byłyby względnie pierwsze. Innymi słowy – ta sama liczba pierwsza nie może się pojawić jako dzielnik a i jako dzielnik b. W rozkład $20!$ na czynniki pierwsze wchodzą dzielniki: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Zatem gdyby nie zakładać, że $q < 1$, to możliwych par (a, b) jest tyle, co podzbiorów zbioru $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Istotnie, dla danego podzbioru $X \subset P$, liczba a jest iloczynem elementu zbioru X, zaś liczba B iloczynem elementów ze zbioru $P \setminus X$. Zauważmy, że nie da się tak wybrać X, że $a = b$. Co więcej, jeśli $a/b > 1$, to $b/a < 1$, zatem dokładnie połowa podzbiorów zbioru P spełnia ten warunek, że $a/b < 1$. Zatem jest $2^7 = 128$ liczb wymiernych spełniających wymogi zadania.

3. **Liczbę naturalną n nazywamy wypasioną, jeżeli dla każdej liczby pierwszej p dzielącej n liczba p^2 również dzieli n. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że n oraz $n+1$ są wypasione.**

   Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2008, ID 3):

   Odpowiedź brzmi: tak. Zauważmy, że iloczyn dwóch liczb wypasionych jest liczbą wypasioną oraz, że kwadraty liczb naturalnych są wypasione. Załóżmy więc, że n i $n+1$ są wypasione. Wówczas wypasiona jest także liczba $4n(n+1)$. Jednocześnie: $4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$, a więc ta liczba jest także wypasiona. Oznacza to, że mając daną parę kolejnych liczb wypasionych możemy wygenerować parę większych, gdyż jasne jest, że $n < 4n(n+1)$. Aby zakończyć rozwiązanie wystarczy zauważyć, że liczby 8 i 9 są wypasione.

4. **Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.**

   Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2008, ID 6):

   Wszystkie liczby n spełniające zadane warunki to liczby pierwsze, potęgi dwójki oraz liczba 6. Istotnie, załóżmy, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy r.

   - Jeśli r = 1, to n nie ma dzielników większych od 1, a zatem n jest liczbą pierwszą.
   - Jeśli r = 2, to n nie ma dzielników pierwszych nieparzystych, a ma parzyste, czyli jest potęgą dwójki.
   - Jeśli $r \geqslant 3$, to n musi być parzyste. W przeciwnym razie wśród liczb względnie pierwszych z n są 1 i 2, co daje $r = 1$. Gdy n jest parzysta i jest potęgą liczby 2, to wśród liczb względnie pierwszych z n są 1 i 3, a więc r = 2. Pozostaje więc przypadek $n = 2^a b$, gdzie $b > 1$ jest nieparzyste i $a \geqslant 1$. Nietrudno zauważyć, że liczby $b-2, b+2$ są mniejsze niż n oraz względnie pierwsze z n, czyli należą do ciągu arytmetycznego. Ponieważ $r > 2$, to r = 4. Pierwszym wyrazem ciągu artymetycznego jest 1, następny to 5, a następny to 9. Widzimy więc, że $n > 6$ musiałaby być podzielna przez 3, ale być względnie pierwsza z 9. Warunku tego nie da sie spełnić. Bez trudu sprawdzamy natomiast, że $n = 6$ spełnia warunki.

5. **Wyznaczyć największą taką liczbę parzystą, której nie da się przedstawić jako sumy dwóch liczb nieparzystych złożonych.**

   Rozwiązanie (AIME):

   Zauważmy, że dla dostatecznie dużej liczby parzystej 2k jedna z liczb $2k-15, 2k-25, 2k-35$ jest podzielna przez 3, ale nie jest równa 3. Zatem $2k \leqslant 38$. Metodą prób i błędów sprawdzamy, że 38 nie da się przedstawić jako sumy dwóch liczby nieparzystych złożonych.