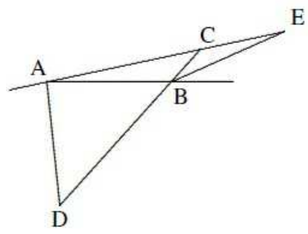
ZADANIA TESTOWE - grupa starsza. Dzień pierwszy.

Przy każdej z odpowiedzi (A), (B), (C) należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

1. Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia $3a^2 + 27b^2 + 5c^2 - 18ab - 30c + 237$, przy założeniu, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi?

   (A) 0 (B) 194 (C) 237

2. Znajdź miarę kąta BAC wiedząc, że dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A oraz B przecinają przeciwległe boki w punktach D oraz E oraz $AD = AB = BE$.



   (A) 10° (B) 11° (C) 12°

3. W trójkącie ABC punkty D, E są środkami boków BC oraz AC. Niech $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE = 30°$. Wówczas:

   (A) AB = AC (B) AB = BC (C) AB = BC = AC

4. Dane są liczby $A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 37 \cdot 38 + 39$ oraz $B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 36 \cdot 37 + 38 \cdot 39$. Wówczas liczba $B - A$

   (A) jest parzysta (B) jest kwadratem (C) jest podzielna przez 4

5. Ze zbioru liczb naturalnych $\{1, \ldots, 2016\}$ wylosowano trzy różne liczby. Niech p będzie prawdopodobieństwem, że iloczyn tych liczb jest liczbą nieparzystą. Wówczas:

   (A) $p < 1/2$ (B) $p = 1/8$ (C) $1/8 < p < 1/3$

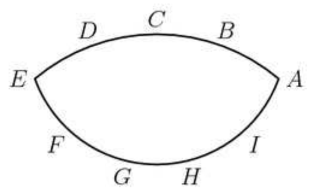
6. Każdy wierzchołek sześcianu oznaczamy jedną z liczb całkowitych od 1 do 8, przy czym każda liczba użyta jest tylko raz i to w taki sposób, że suma liczb przypisanych do czterech wierzchołków każdej ściany jest taka sama. Ile jest takich możliwych ponumerowań wierzchołków sześcianu jeśli założymy, że każde dwa ponumerowania, które dadzą się otrzymać z siebie przez obrót sześcianu wokół jednej z jego osi są identyczne?

   (A) 4 (B) 8 (C) 12

ZADANIA OTWARTE - grupa starsza. Dzień pierwszy.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Punkty A, B, C, D, E rozmieszczono w równych odległościach na krótszym łuku pewnego okręgu. Z kolei punkty E, F, G, H, I oraz A rozmieszczono w równych odległościach na łuku innego okręgu, dokładniej – okręgu o środku w punkcie C (patrz rysunek poniżej). Zachodzi przy tym następująca zależność: $\measuredangle ABD - \measuredangle AHG = 12°$. Znajdź miarę kąta BAG.



2. Wykaż, że liczba, której zapis dziesiętny ma postać $\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{22\ldots22}_{n}$ równa jest iloczynowi $A(A+1)$, gdzie $A = \underbrace{33\ldots33}_{n}$.

3. Na liście mailowej klasy III Y znajduje się 17 osób. Każda osoba prowadzi korespondencję z każdą, przy czym każda para rozmawia na jeden z trzech tematów: MATURA, WAKACJE, STUDIA. Udowodnij, że istnieje trójka ludzi rozmawiających (nawzajem) ze sobą na ten sam temat.

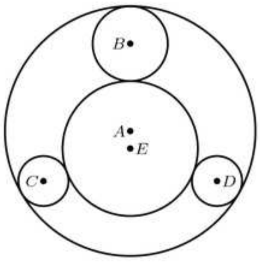
ZADANIA TESTOWE - grupa starsza. Dzień drugi.

Przy każdej z odpowiedzi (A), (B), (C) należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

1. W każdym punkcie kratowym płaszczyzny (o obydwu współrzędnych będących liczbami całkowitymi) umieszczono okrąg o promieniu $1/10$ oraz kwadrat o promieniu $1/5$, którego boki są równoległe do osi współrzędnych. Prosta przechodząca przez punkty $(0,0)$ oraz $(1001,429)$ przecina m kwadratów i n okręgów umieszczonych w punktach kratowych. Wówczas:

   (A) $m+n=570$ (B) $m+n=572$ (C) $m+n=574$

2. Trójkąt równoboczny T jest wpisany w okrąg ω_A o środku A i promieniu 10. Okrąg ω_B o środku B i promieniu 3 jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_A w jednym z wierzchołków trójkąta T. Okręgi ω_C i ω_D o środkach odpowiednio w punktach C, D i promieniach równych 2 są styczne wewnętrznie do okręgu ω_A w pozostałych wierzchołkach T. Okręgi $\omega_B, \omega_C, \omega_D$ są styczne zewnętrznie do okręgu ω_E o środku E, którego promień wynosi r. Wówczas



   (A) $r=\frac{27}{5}$ (B) $r=\frac{35}{7}$ (C) $r=\frac{38}{7}$

3. Znajdź liczbę trójek liczb całkowitych dodatnich (x,y,z) spełniających równość $x-y+z=1$ takich, że x,y,z są różne i iloczyn dowolnych dwóch z nich jest podzielny przez trzecią.

   (A) zero (B) skończenie wiele (C) nieskończenie wiele

4. Liczby dodatnie a,b,c są długościami boków pewnego trójkąta. Wówczas z odcinków długości $1/(a+b), 1/(b+c), 1/(c+a)$ można złożyć trójkąt:

   (A) gdy $a=b=c$ (B) gdy $a=b$ lub $b=c$ lub $c=a$ (C) zawsze

5. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, niech $f(n)=n^4-360n^2+400$. Jaka jest suma wszystkich wartości $f(n)$, które są liczbami pierwszymi?

   (A) 794 (B) 798 (C) 802

6. Funkcja $f(x)$ spełnia równanie $f(2+x)=f(2-x)$, dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Jeśli równanie $f(x)=0$ ma dokładnie cztery różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4, wówczas suma tych czterech liczb jest równa:

   (A) 4 (B) 8 (C)16

ZADANIA OTWARTE - grupa starsza. Dzień drugi.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. W trapezie $ABCD$ $(AB||CD)$ punkt M jest środkiem boku CD. Prosta AM przecina przekątną BD w punkcie E. Przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do CD przecinającą proste AC, BC oraz AD odpowiednio w punktach F, G oraz H. Wykaż, że $HE = EF = FG$.

2. Dana jest szachownica o wymiarach 2014×2014. Czy można ją tak pokryć kostkami domina rozmiaru 1×2, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?

3. Udowodnij, że równanie $a^2 + b^2 - 8c = 6$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

ZADANIA TESTOWE - grupa starsza. Dzień trzeci.

Przy każdej z odpowiedzi należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

1. Ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że $n^2 - 19n + 99$ jest kwadratem liczby całkowitej?

.... więcej niż 5

.... mniej niż 3

.... dokładnie 5

2. Załóżmy, że a, b, c oraz d są liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$ oraz $c - a = 19$. Wówczas $d - b$ równe jest:

.... więcej niż 100

.... więcej niż 300

.... więcej niż 500

3. Okręgi S_1, S_2, S_3 o promieniach 1, 2, 3 są parami styczne zewnętrznie. Jakie jest pole trójkąta powstającego z trzech punktów styczności odpowiednich par okręgów?

.... 3/5

.... 4/5

.... 4/3

4. Adam, Bronek, Czesio, Darek, Edek oraz Frania mają konta na znanym portalu społecznościowym. Niektórzy, ale nie wszyscy, są swoimi przyjaciółmi (jest to relacja symetryczna), ale żaden z nich nie ma przyjaciela poza tą grupą. Każdy z nich ma tyle samo przyjaciół. Ile jest różnych możliwych układów znajomości w tym internetowym gronie?

.... Więcej niż 165

.... Więcej niż 170

.... Więcej niż 175

5. Niech (a, b, c) będą liczbami nieparzystymi. Wówczas następujące fakty zachodzą dla poniższego równania: $\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}$.

.... a = b

.... istnieje skończenie wiele rozwiązań tego równania

.... istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego równania

ZADANIA TESTOWE - grupa starsza. Dzień trzeci.

Przy każdej z odpowiedzi należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

6. Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, zaś długości boków tego trójkąta wynoszą $4, 5, x$. Wówczas:

.... x może być równy $\sqrt{21}$,

.... x może być równy $2+\sqrt{13}$,

.... x może być równy $2+\sqrt{21}$.

7. Na okręgu umieszczono 2000 punktów. Oznaczmy jeden z nich przez „1". Od tego punktu, odliczamy dwa w kierunku wskazówek zegara i oznaczamy uzyskany punkt przez „2". Następnie odliczamy kolejne trzy punkty w kierunku wskazówek zegara i oznaczamy tak otrzymany punkt przez „3". Kontynuujemy w ten sposób aż pewien punkt X zostanie oznaczony jako „1993". Niektóre z początkowych 2000 punktów zostaną oznaczone wielokrotnie. Jaka jest najmniejsza liczba, którą oznaczono punkt X?

.... ta liczba jest większa niż 100

.... ta liczba jest wieksza niż 110

.... ta liczba jest większa niż 1992.

8. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ punkty W, X, Y, Z są obrane odpowiednio na bokach BC, CD, EF oraz FA tak, że proste AB, ZW, YX, ED są równoległe i równoodległe (patrząc w tej kolejności). Jaki jest stosunek pola sześciokąta $WCXYFZ$ do pola sześciokąta $ABCDEF$?

.... 7/12

.... 4/9

.... 11/27

9. Liczba N ma tę własność, że zbiór 1000 kolejnych liczb całkowitych zaczynających się od 1000N nie zawiera kwadratu liczby naturalnej. Wówczas

.... $N \geqslant 250$

.... $N \geqslant 300$

.... $N \geqslant 400$

10. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Niech $X = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Wówczas:

.... $X < 1$

.... $X < 2$

.... $X < 3$