**KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza.**

**Dzień pierwszy. Czas: 120 minut**

---

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

---

**Zadanie 1.** *W pewnym liceum są trzy klasy $A$, $B$, $C$, w każdej po 30 osób. Każdy uczeń tej szkoły ma przynajmniej 31 znajomych na Facebooku w klasach, do których nie należy. Udowodnić, że istnieje trójka osób, każda z innej klasy, która jest znajomymi na Facebooku.*

**Zadanie 2.** *W samym środku kwadratowego więzienia bez ścian stoi ork Azog. W wierzchołkach kwadratu stoją czterej elficcy strażnicy. Ork może poruszać się po całym terenie, elfy jedynie po brzegach kwadratu. Strażnicy mogą jednak poruszać się nawet* 1.5 *razy szybciej niż więzień. Jeśli Azog napotka na brzegu jedynie jednego elfa, obezwładni go i ucieknie. Nie poradzi sobie jednak z dwoma elfami na raz. Pokaż, że elfy są w stanie utrzymać Azoga wewnątrz więzienia bez ścian.*

**Zadanie 3.** *Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich $a, b$, że poniższe wyrażenia:*

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \text{ oraz } \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

*są liczbami całkowitymi.*

**Zadanie 4.** *Na płaszczyźnie danych jest 13 punktów kratowych, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o środku ciężkości w punkcie kratowym. Uwaga. Punkt kratowy to punkt o obu współrzędnych całkowitych.*

**KONKURS ZADANIOWY – grupa stasza.**

**Dzień drugi. Czas: 120 minut**

---

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

---

**Zadanie 1.** *Rada Królowej Naboo Amidali składa się z 12 członków. Niektórzy członkowie Rady wzajemnie nie się znoszą. Jednakże, każdy członek Rady nie znosi mniej niż połowy członków. Rada spotyka się przy okrągłym stole. Królowa Amidala zna stosunki pomiędzy jej członkami i pragnie umieścić ich przy stole tak by członkowie nie znoszący się nawzajem nie siedzieli obok siebie. Czy jest to mozliwe?*

**Zadanie 2.** *Alicja i Bob grają w następującą grę na szachownicy rozmiarów* $8\times 8$. *Alicja zaczyna stawiając skoczka na wybranym przez siebie polu. Następnie gracze naprzemian wykonują ruch skoczkiem (zgodnie ze standardowymi zasadami: 2 pola w jednym kierunku, jedno na bok), pryz czym zawsze muszą przejść na pole gdzie skoczka dotąd nie było. Pierwszy gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Kto ma stategię wygrywającą w tej grze i na czym ona polega?*

**Zadanie 3.** *Punkt* $P$ *leży na boku* $AB$ *trójkąta* $ABC$. *Wykaż, że prosta symetryczna do prostej* $CP$ *względem prostej przechodzącej przez środki okręgów wpisanych w trójkąty* $ACP$ *i* $BCP$ *przechodzi przez pewien punkt niezależny od położenia punktu* $P$.

**Zadanie 4.** *Liczby całkowite* $a, b, c, d, e, f$ *są takie, że liczba*

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + f^5$$

*jest podzielna przez* $25$. *Udowodnij, że liczba*

$$a^{25} + b^{25} + c^{25} + d^{25} + e^{25}$$

*jest podzielna przez* $125$.

**KONKURS ZADANIOWY – grupa stasza.**

**Dzień trzeci. Czas: 120 minut**

---

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

---

**Zadanie 1.** *W orkąg wpisano ośmiokąt $ABCDEFGH$, przy czym $AB = CD = DE = FG$ oraz $BC = EF = GH = HA$. Wykaż, że trójkąt $ADG$ i czworokąt $BCEF$ mają równe pola.*

**Zadanie 2.** *Udowodnij, że wśród liczb postaci $2^n + 3^n$, gdzie $n$ jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od $10^{2018}$ jest mniej niż 10 000 liczb pierwszych.*

**Zadanie 3.** *Pokaż, że wśród dowolnych 21 osób istnieją trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają lub sześć osób, z których każde dwie się znają.*

**Zadanie 4.** *Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ spełniających warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$ zachodzi nierówność:*

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2 \leqslant 8.$$