KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza.

Dzień pierwszy. Czas: 120 minut

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

Zadanie 1. *Zosia i Gosia grają w grę polegającą na kolorowaniu boków 2017-kąta foremnego. Zawodniczki wykonują ruch na przemian i w każdym ruchu kolorowany jest jeden bok. Zosi wolno kolorować dowolny bok, który styka się wierzchołkami z 0 lub 2 już pokolorowanymi bokami. Gosi natomiast wolno kolorować jedynie boki, które stykają się z dokładnie 1 już pokolorowanym bokiem. Przegrywa zawodniczka, która nie może pokolorować żadnego boku. Która zawodniczka ma strategię wygrywającą?*

Zadanie 2. *Dane są liczby całkowite a, b, c spełniające warunek $(a-b)(b-c)(c-a) = a+b+c$. Pokazać, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 27.*

Zadanie 3. *Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę wierzchołków? Odpowiedź uzasadnij.*

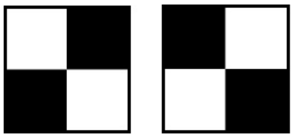
Zadanie 4. *Dany jest trójkąt ABC o polu 1. Niech M będzie rzutem punktu B na dwusieczną kąta ACB. Znajdź pole trójkąta AMC.*

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza.

Dzień drugi. Czas: 120 minut

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

Zadanie 1. *Każde pole (rozmiarów* 1×1*) szachownicy rozmiarów* 100×100 *pokolorowane jest na biało lub czarno. Wszystkie pola znajdujące się na brzegu są czarne. Wiadomo także, że każdy kwadratowy region szachownicy mający rozmiar* 2×2 *zawiera pola o różnych kolorach. Pokazać, że istnieje na tej szachownicy region rozmiarów* 2×2 *pokolorowany na jeden ze sposobów przedstawionych niżej.*

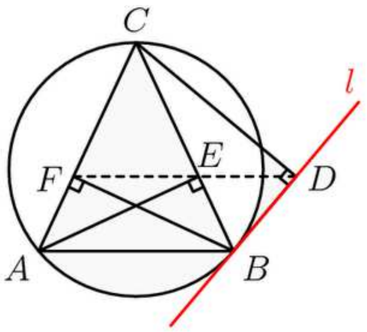


Zadanie 2. *Niech* x, y *będą liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi warunek* $3x^2 + x = 4y^2 + y$*. Pokazać, że liczba* $x - y$ *jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 3. *Niech* a, b *będą rzeczywistymi liczbami dodatnimi takimi, że* $a + b = 1$*. Wykaż, że:*

$$2 < \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{9}{4}.$$

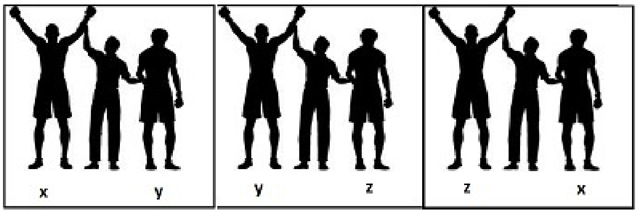
Zadanie 4. *Niech* ABC *będzie trójkątem równoramiennym o podstawie* AB*. Prosta* l *jest styczna do okręgu opisanego na* ABC *w punkcie* B*. Niech* D *będzie rzutem punktu* C *na prostą* l *oraz niech* E, F *będą rzutami punktów* A *oraz* B *odpowiednio na boki* BC *oraz* AC *trójkąta* ABC*. Wykaż, że punkty* D, E, F *są współliniowe.*



PRÓBA OLIMPIJSKA – grupa starsza. Czas: 300 minut

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

Zadanie 1. *W turnieju bokserskim bierze udział 2017 zawodników, przy czym każdy zawodnik walczy z każdym z pozostałych jeden raz. Trójkę zawodników x, y, z nazwiemy remisową jeśli x pokonał y, dalej y pokonał z, zaś z pokonał x, jak na rysunku poglądowym.*



Pokazać, że jeśli w turnieju nie było trójek remisowych, to żadnych dwóch zawodników nie mogło mieć jednakowej liczby zwycięstw.

Zadanie 2. *Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$ o następującej własności: dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d o iloczynie $abcd$ podzielnym przez n^3, co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n.*

Zadanie 3. *Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle CAB = 60°$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I – środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.*