

Nieparzyste dzielniki i wykładniki p-adyczne

Zadania do samodzielnego rozwiązania
Warsztaty matematyczne I LO w Koszalinie
Grupa starsza, 14.08.2020 r.,

Zadanie 1. Rozważmy zbiór S złożony z n liczb postaci:

$$S = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1, 2n\}.$$

Pokaż, że suma największych nieparzystych dzielników wszystkich elementów zbioru S równa jest n^2 .

Zadanie 2. Pokazać, że dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n liczba 2^n nie jest dzielnikiem liczby $n!$.

Zadanie 3. Dane są liczby całkowite x, y takie, że suma

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że obydwa składniki powyższej sumy są liczbami całkowitymi.

Zadanie 4. Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych a, b, c jest równy 1. Udowodnij, że jeżeli zachodzi równość $ab = c(b - a)$, to liczba $b - a$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5. Liczby naturalne a i b mają tę własność, że dla każdego n naturalnego liczba b^{n+1} jest podzielna przez liczbę a^n . Udowodnić, że a jest dzielnikiem b .