# Zadania z Warsztatów matematycznych I LO

## Dzień pierwszy - 17 września 2007r.

**Grupa „młodsza”**

1. Czy liczba $100\ldots09$ jest kwadratem liczby naturalnej, jeżeli pomiędzy 1 a 9 znajduje się 99 zer?
2. W turnieju szachowym brało udział dziesięciu zawodników. Wykaż, że w każdym momencie trwania turnieju co najmniej dwóch szachistów rozegrało taką samą liczbę partii.
3. Wykaż, że jeżeli 1 jest sumą długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o przekątnej d, to: $1 \leqslant 4\sqrt{3} \cdot d$.
4. W okręgu o promieniu 10cm poprowadzono dwie równoległe cięciwy o długościach 12cm i 16cm. Oblicz odległość tych cięciw.
5. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość:
$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

**Grupa „starsza”**

1. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to:
$$1 < \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} < 2.$$
2. W turnieju szachowym brało udział dziesięciu zawodników. Wykaż, że w każdym momencie trwania turnieju co najmniej dwóch szachistów rozegrało taką samą liczbę partii.
3. Trójkąt równoboczny $ABC$ wpisany jest w okrąg. Punkt $P$ należy do mniejszego z łuków $AB$. Wykaż, że: $|PA| + |PB| = |PC|$.

4. W trapez prostokątny o podstawach długości 4 i 12 wpisano okrąg. Wyznacz długość promienia tego okręgu.

5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ x^4+y^4+z^4=17 \end{cases}$$

## Dzień drugi - 18 września 2007r.

**Grupa „młodsza”**

1. Dana jest następująca tablica liczb naturalnych, zwana tablicą Pitagorasa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ \dots & & & & \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{bmatrix}.$$

   Oblicz $n$ wiedząc, że suma wszystkich liczb w tablicy jest równa 36100.

2. Dany jest dziesięciokąt foremny. Niech $P$ będzie dowolnym punktem okręgu opisanego na tym wielokącie. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków wielokąta nie zależy od wyboru punktu $P$.

3. Wykaż, że liczba sześciocyfrowa $\overline{ABABAB}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Czy liczba $2^{40}-2^{38}-2^{31}+1$ jest liczbą złożoną? Odpowiedź uzasadnij.

5. Uzasadnij, że jeżeli $x, y > 0$, to

$$\frac{x+y}{1+x+y} < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{1+y}.$$

**Grupa „starsza’**

1. Rozwiązać równanie: $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$.

2. Punkty $A, B, C, D, E$ leżą w podanej kolejności na okręgu $O$ i spełniają: $AB||EC$ oraz $AC||ED$. Prosta styczna do okręgu $O$ w punkcie $E$ przecina prostą $AB$ w punkcie $P$. Proste $BD$ i $EC$ przecinają się w punkcie $Q$. Udowodnić, że $AC = PQ$.

3. Liczby 1, 2, 3, ... , 49 rozmieszczono w tablicy $7 \times 7$, po czym obliczono sumę liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Niektóre z tych 14 sum są nieparzyste, a pozostałe są parzyste. Niech $A$ oznacza sumę wszystkich nieparzystych sum, zaś $B$ sumę wszystkich parzystych sum. Czy jest możliwe takie rozłożenie liczb, że: $A = B$?

4. Rozwiązać w zbiorze liczb naturalnych równanie: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{12}$.

5. Wykazać, że jeżeli $a > 0$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}}_{n} < \sqrt{a} + 1.$$

## Dzień trzeci - 19 września 2007r.

**Grupa „młodsza”**

1. W trójkąt o wysokościach $x, y, z$ wpisano okrąg o promieniu $r$. Wykaż, że:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}.$$

2. Znajdź dwie liczby naturalne, których suma wynosi 750, zaś iloraz z dzielenia ich najmniejszej wspólnej wielokrotności przez ich największy wspólny dzielnik jest równy 1196.

3. Rozwiąż równanie:

$$x^4 + (x+1)(5x^2 - 6x - 6) = 0.$$

4. Niech $p > 2$ będzie daną liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie liczby naturalne $x, y$, że: $x^2 - y^2 = p$.

5. W pola szachownicy wpisano w sposób losowy liczby ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Obliczono sumy liczb w wierszach, kolumnach i na przekątnych. Wykaż, że pewne dwie spośród tych sum są równe.

**Grupa „starsza”**

1. Niech $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieją funkcje $f, g : A_n \to A_n$, spełniające warunki:

   (a) $f(f(k)) = g(g(k)) = k$, $k = 1, 2, 3, \ldots n$;

   (b) $g(f(k)) = k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots n - 1$.

2. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych $(x, y)$, spełniające równanie:

$$(xy - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$$

.

3. Niech $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \pi/2$. Udowodnij, że:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

4. W trójkącie $ABC$ kąt $BCA$ jest rozwarty oraz $\angle ABC = 2 \cdot \angle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt $B$ i prostopadła do boku $BC$ przecina prostą $AC$ w punkcie $D$. Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$. Dowieść, że $\angle AMC = \angle BMD$.

5. Udowodnij nierówność:

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2.$$