IV Warsztaty Matematyczne

I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Zadania i rozwiązania. Grupa młodsza.

Dzień trzeci – 29.09.2010r.

Streszczenie

Przygotowując zadania opierałem się o zasoby zadaniowe pochodzące z następujących źródeł:

- Olimpiada Matematyczna (www.om.edu.pl)
- Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej (www.om.edu.pl)
- Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl)
- American Invitational Mathematics Examination (http://www.artofproblemsolving.com)
- Norway Niels Henrik Abels Math Contest (http://www.artofproblemsolving.com)
- „103 trigonometry problems"; Titu Andreescu, Zuming Feng; Birkhuser 2005.
- Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (http://cut-the-knot.org)

Część I

Zadania

Test, dzień trzeci, grupa młodsza

1. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$ będą liczbami pierwszymi takimi, że

$$X = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4.$$

Wówczas:

.... ciąg ten musi zawierać liczbę 5

.... X jest podzielne przez 5

.... najmniejsza możliwa wartość p_5 to 29.

2. Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez każdą swoją cyfrę?

.... 9

.... 14

.... 15

3. Dany jest sześcian. Każdą z jego ścian malujemy jednym z kolorów: białym lub czarnym. Dwa kolorowania sześcianu, które są identyczne po obróceniu sześcianu uważamy za jedno i to samo kolorowanie. Ile jest możliwych kolorowań?

.... 10

.... 15

.... 20

4. Na sześcianie zaznaczono 27 punktów: wierzchołki sześcianu, środki krawędzi, środki ścian oraz środek sześcianu. Ile jest różnych prostych zawierających przynajmniej 3 z wyróżnionych punktów tego szećcianu?

.... 33

.... 49

.... 72

5. Na imprezie jest 6 chłopaków i pewna liczba dziewczyn. Niektore pary chłopców i dziewczyn łączy znajomość. Każdy chłopiec jest znajomym co najwyżej 3 dziewczyn. Dwie dziewczyny mają dokładnie 4 znajomych chłopców, a pozostałe mają dokładnie po 2 znajomych chłopców. Ile może być maksymalnie dziewczyn na tej imprezie?

.... 7

.... 8

.... więcej niż 8

6. Zawody w kręgle składają się z wielu serii. Marta uzyskała w poprzedniej serii 185 punktów. Pozwoliło jej to na podniesienie średniej z 176 do 177 punktów. Ile punktów Marta potrzebuje w następnej kolejce, aby zwiększyć średnią do 178?

.... 185

.... 186

.... 187

Konkurs, dzień trzeci, grupa młodsza

1. Rozważmy ciąg liczb całkowitych, który zaczyna się od elementów 1000, x, przy czym $x > 0$. Każdy kolejny element tego ciągu (od trzeciego począwszy) jest różnicą dwóch poprzednich. Gdy w ciągu pojawi się pierwsza liczba ujemna, przestajemy tworzyć kolejne elementy (np. dla $x = 500$ dostajemy ciąg 1000, 500, 500, 0, -500). Dla jakiego x dostaniemy ciąg maksymalnej długości?

2. Ciąg liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ ma tę własność, że dla każdego k od 1 do 100, liczba x_k jest o k mniejsza od sumy pozostałych 99 elementów tego ciągu. Znajdź x_{50}.

3. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi?

4. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt D leży na prostej BC. Konstruujemy trójkąt równoboczny ADE taki, że punkt E leży po tej samej stronie prostej AD, co punkt C. Udowodnij, że niezależnie od wyboru punktu D punkty E leżą zawsze na prostej równoległej do odcinka AB.

5. W klasie nauczyciel zauważa, że każdy uczeń ma dokładnie 3 kumpli. Jeśli dwóch uczniów w jego klasie jest kumplami, to nie mają oni żadnego wspólnego kumpla. Wiadomo też, że jeśli dwóch uczniów w jego klasie nie jest kumplami, to mają oni wspólnego kumpla. Ile jest osób w tej klasie?

Część II

Rozwiązania

Test, dzień trzeci, grupa młodsza

1. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$ będą liczbami pierwszymi takimi, że

$$X = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4.$$

Wówczas:

.... ciąg ten musi zawierać liczbę 5

.... X jest podzielne przez 5

.... najmniejsza możliwa wartość p_5 to 29.

Odpowiedź:

- NIE, przykładem jest ciąg 7, 37, 67, 97, 127.
- NIE, przykładem jest ciąg 5, 11, 17, 23, 29. (ale jeśli miałby nie zawierać 5, to odpowiedź jest TAK)
- TAK, ciąg albo zawiera 5, albo jego różnica jest podzielna przez 5. Można też sprawdzić bezpośrednio.

2. Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez każdą swoją cyfrę?

.... 9

.... 14

.... 15

Odpowiedź:

- NIE,
- TAK, te liczby to 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99
- NIE,

3. Dany jest sześcian. Każdą z jego ścian malujemy jednym z kolorów: białym lub czarnym. Dwa kolorowania sześcianu, które są identyczne po obróceniu sześcianu uważamy za jedno i to samo kolorowanie. Ile jest możliwych kolorowań?

.... 10

.... 15

.... 20

Odpowiedź: Idziemy przez przypadki, tzn. ustalamy ile ścian ma być kolorowanych na biało:

- 0 ścian - wówczas jest 1 kolorowanie (wszystko na czarno)
- 1 ściana - wówczas jest 1 kolorowanie
- 2 ściany - wówczas są 2 kolorowania: albo ściany mają wspólną krawędź, albo leżą naprzeciw siebie
- 3 ściany - wówczas są 2 kolorowania: albo ściany mają wspólny wierzchołek, albo nie
- 4 ściany - tak jakbyśmy rozpatrywali problem dla dwóch czarnych - 2 kolorowania

- 5 ścian - tak jakbyśmy rozpatrywali problem dla jednej czarnej - 1 kolorowanie
- 6 ścian - 1 kolorowanie

- TAK,
- NIE,
- NIE,

4. Na sześcianie zaznaczono 27 punktów: wierzchołki sześcianu, środki krawędzi, środki ścian oraz środek sześcianu. Ile jest różnych prostych zawierających przynajmniej 3 z wyróżnionych punktów tego sześcianu?

.... 33

.... 49

.... 72

Odpowiedź: Warto podzielić rozwiązywanie na przypadek, gdy prosta przechodzi przez środek sześcianu i gdy nie przechodzi. Gdy nie przechodzi mamy 12 krawędzi, 12 przekątnych, 12 „środkowych”. Gdy prosta przechodzi przez środek to może być pionowa/pozioma (3 przypadki) lub ukośna (6 przez wierzchołki i 4 przez środki krawędzi. Razem 49.

- NIE,
- TAK,
- NIE,

5. Na imprezie jest 6 chłopaków i pewna liczba dziewczyn. Niektore pary chłopców i dziewczyn łączy znajomość. Każdy chłopiec jest znajomym co najwyżej 3 dziewczyn. Dwie dziewczyny mają dokładnie 4 znajomych chłopców, a pozostałe mają dokładnie po 2 znajomych chłopców. Ile może być maksymalnie dziewczyn na tej imprezie?

.... 7

.... 8

.... więcej niż 8

Odpowiedź: jest ich maksymalnie 7. Weźmy dwie dziewczyny, które znają po 4 chłopców. Jeśli znają dokładnie tych samych 4 chłopców, to łatwo widzieć, że dziewczyn jest maksymalnie 7. Łatwo zobaczyć, że dziewczyny znają łącznie $8+2(d-2)$ chłopców, gdzie d to liczba dziewczyn. Chłopców „do podziału” jest natomiast 6, przy każdym max. 3 miejsca. Zatem $8 + 2(d - 2) \leqslant 18 \Rightarrow d \leqslant 7$.

- TAK,
- NIE,
- NIE,

6. Zawody w kręgle składają się z wielu serii. Marta uzyskała w poprzedniej serii 185 punktów. Pozwoliło jej to na podniesienie średniej z 176 do 177 punktów. Ile punktów Marta potrzebuje w następnej kolejce, aby zwiększyć średnią do 178?

.... 185

.... 186

.... 187

Odpowiedź: zobaczmy ile rund rozegrała Marta do tej pory. Suma jej wyników w poprzednich rundach to 176n + 185. Wiemy, że: $\frac{176n+185}{n+1} = 177$. Stąd $n = 8$. Teraz już łatwo sprawdzić, że potrzeba jej 187 punktów.

- NIE
- NIE
- TAK

Konkurs, dzień trzeci, grupa młodsza

1. **Ciąg liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ ma tę własność, że dla każdego k od 1 do 100, liczba x_k jest o k mniejsza od sumy pozostałych 99 elementów tego ciągu. Znajdź x_{50}.**

Rozwiązanie (AIME):

Mamy następujący układ równań:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & + & 1 & = & 0 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{99} & + & x_{100} \\
x_2 & + & 2 & = & x_1 & + & 0 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{99} & + & x_{100} \\
x_3 & + & 3 & = & x_1 & + & x_2 & + & 0 & + & \ldots & + & x_{99} & + & x_{100} \\
 & \vdots & & & & & & & & & \vdots & & & & \\
x_{99} & + & 99 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & 0 & + & x_{100} \\
x_{100} & + & 100 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{99} & + & 0
\end{array}$$

Niech $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}$. Jeśli wyznaczymy X, to zadanie będzie rozwiązane, bo $x_{50} + 50 = X - x_{50}$. A więc $x_{50} = \frac{X-50}{2}$. Po dodaniu wszystkich powyższych warunków stronami dostajemy:

$$X + 1 + 2 + \ldots + 100 = 99X \Rightarrow \frac{100 \cdot 101}{2} = 98X.$$

Zatem $X = \frac{50 \cdot 101}{98}$. To kończy rozwiązanie.

2. **Rozważmy ciąg liczb całkowitych, który zaczyna się od elementów 1000, x, przy czym $x > 0$. Każdy kolejny element tego ciągu (od trzeciego począwszy) jest różnicą dwóch poprzednich. Gdy w ciągu pojawi się pierwsza liczba ujemna, przestajemy tworzyć kolejne elementy (np. dla $x = 500$ dostajemy ciąg 1000, 500, 500, 0, -500). Dla jakiego x dostaniemy ciąg maksymalnej długości?**

Rozwiązanie (AIME):

Spójrzmy na pierwsze kilka elementów tego ciągu:

$$1000, x, 1000 - x, 2x - 1000, 2000 - 3x, 5x - 3000, 5000 - 8x, 13x - 8000, ...$$

Widzimy pewną regularność. Widzimy, że pojawiają się tu kolejne współczynniki ciągu Fibonacciego. Chodzi nam jednak o to, by te wyrazy były możliwie daleko nieujemne. Mamy więc serię warunków:

$$2x - 1000 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 500$$

$$2000 - 3x \geqslant 0 \Rightarrow 667 > x$$

$$5x - 3000 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 600$$

$$5000 - 8x \geqslant 0 \Rightarrow 625 \geqslant x$$

$$13x - 8000 \geqslant 0 \Rightarrow x > 615$$

$$13000 - 21x \geqslant 0 \Rightarrow 619 \geqslant x$$

$$34x - 21000 \geqslant 0 \Rightarrow x > 617$$

$$34000 - 55x \geqslant 0 \Rightarrow 618 \geqslant x.$$

Te oszacowania pozwalają stwierdzić, że właściwą liczbą jest $x = 618$.

3. **Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi?**

   Rozwiązanie (II OMG, III etap, Zadanie 5):

   Taki ostrosłup istnieje. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie prostopadłościanem. Wówczas ostrosłup czworokątny $ABCDA'$ spełnia warunki zadania.

4. **Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt D leży na prostej BC. Konstruujemy trójkąt równoboczny ADE taki, że punkt E leży po tej samej stronie prostej AD, co punkt C. Udowodnij, że niezależnie od wyboru punktu D punkty E leżą zawsze na prostej równoległej do odcinka AB.**

   Rozwiązanie (Cut The Knot):

   Rozważamy trzy przypadki:

   - Punkt D leży wewnątrz odcinka BC.

     Chcemy pokazać, że kąt DCE ma 120°. Rozważmy okrąg opisany na trójkącie ACD. Ze względu na równość kątów ACD i AED okrąg ten musi zawierać także punkt E. Zatem na czworokącie $ADCE$ można opisać okrąg. Wynika stąd, że suma kątów DAE i DCE wynosi 180°, zatem kąt DCE ma 120°.

   - Punkt D leży poza odcinkiem BC, po stronie punktu B.

     Chcemy teraz wykazać, że kąt ACE równy jest 120°. Zauważmy, że na czworokącie $ADEC$ można opisać okrąg. Istotnie, jest to okrąg opisany na trójkątach ADC i ADE. Skoro kąt ADE ma 60°, to kąt ACE ma 120°.

   - Punkt D leży poza odcinkiem BC, po stronie punktu C.

     Chcemy teraz wykazać, że kąt ACE równy jest 120°. Odbijamy punkt E symetrycznie względem AD i dostajemy punkt E'. Na czworokącie $ACDE$ można opisać okrąg. Istotnie, suma kątów ACD i $AE'D$ to 180°. Stąd kąty ADE' i ACE' są równe i wynoszą po 60°. Zatem także kąt ACE ma 60°.

5. **W klasie nauczyciel zauważa, że każdy uczeń ma dokładnie 3 kumpli. Jeśli dwóch uczniów w jego klasie jest kumplami, to nie mają oni żadnego wspólnego kumpla. Wiadomo też, że jeśli dwóch uczniów w jego klasie nie jest kumplami, to mają oni wspólnego kumpla. Ile jest osób w tej klasie?**

   Rozwiązanie (Norway Niels Henrik Abels Math Contest 1995, Runda 2, Zad 7):

   Weźmy konkretnego ucznia X. Wiadomo, że każdy inny uczeń jest albo jego kumplem, albo kumplem jego kumpla. Zatem jest ich łącznie co najwyżej $1 + 3 + 2 \cdot 3 = 10$. Łatwo widzieć, że liczba osób w klasie nie może być nieparzysta. Istotnie, jeśli n jest liczbą osób w klasie, to znajomości jest 3n/2. Łatwo widzieć, że musi być przynajmniej 6 osób (ktoś, jego trzech znajomych, ich znajomi - można skonstruować przykład). Należy jeszcze sprawdzić, że w klasie nie może być 8 lub 10 osób.