IV Warsztaty Matematyczne

I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Zadania i rozwiązania. Grupa młodsza.

Dzień pierwszy – 27.09.2010r.

Streszczenie

Przygotowując zadania opierałem się o zasoby zadaniowe pochodzące z następujących źródeł:

- Olimpiada Matematyczna (www.om.edu.pl)
- Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej (www.om.edu.pl)
- Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl)
- American Invitational Mathematics Examination (http://www.artofproblemsolving.com)
- Norway Niels Henrik Abels Math Contest (http://www.artofproblemsolving.com)
- „103 trigonometry problems"; Titu Andreescu, Zuming Feng; Birkhuser 2005.
- Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (http://cut-the-knot.org)

Część I

Zadania

Test, dzień pierwszy, grupa młodsza

1. Nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

.... jest nieprawdziwa dla dowolnych $a, b < 0$.

.... jest nieprawdziwa dla pewnych $a, b > 0$.

.... jest prawdziwa dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (niezerowych).

2. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas:

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p przez 4.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p przez 5.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p przez 6.

3. Dany jest trójkąt ABC, który nie jest równoramienny. Z wierzchołka A prowadzimy odpowiednio: wysokość h_a, środkową s_a oraz dwusieczną t_a. Wówczas:

.... istnieje trójkąt ABC, gdzie wysokość h_a leży pomiędzy środkową s_a, a dwusieczną t_a.

.... istnieje trójkąt ABC, gdzie środkowa s_a leży pomiędzy dwusieczną t_a, a wysokością h_a.

.... istnieje trójkąt ABC, gdzie dwusieczna t_a leży pomiędzy wysokością h_a, a środkową s_a.

4. Czworokąt $ABCD$ jest taki, że trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB mają równe obwody.

.... czworokąt ten jest zawsze kwadratem.

.... czworokąt ten jest zawsze równoległobokiem.

.... czworokąt ten jest zawsze trapezem.

5. Dane są dwa czworościany A_1, A_2, przy czym A_1 leży wewnątrz A_2. Wynika stąd, że:

.... objętość A_1 jest mniejsza niż objętość A_2.

.... sfera opisana na A_1 jest zawarta wewnątrz sfery opisanej na A_2.

.... suma krawędzi A_1 jest mniejsza niż suma krawędzi A_2.

6. Każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ jest równa 1 lub -1. Rozważmy wyrażenie

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots x_{2008}x_{2009} + x_{2009}x_1.$$

Wówczas:

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = 0$

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2007$

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2009$

Konkurs, dzień pierwszy, grupa młodsza

1. Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 20.

2. Wyznaczyć najmniejszą możliwą dodatnią wielokrotność 15, której zapis w systemie dziesiętnym zawiera jedynie cyfry: 0 i 8.

3. Ile jest parami nieprzystających trójkątów prostokątnych, ktorych przyprostokątne mają długości będące liczbami całkowitymi oraz pole jest trzykrotnie większe (co do wartości) od obwodu?

4. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby:

$$n^2 + n + 1 \text{ oraz } n^2 + n + 3$$

   są pierwsze.

5. W turnieju tenisa stołowego wzieło udział 50 zawodników. Kazdy zawodnik rozegrał jeden mecz z kazdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy mozliwe jest, aby kazdy z uczestników wygrał te sama liczbe meczów?

Część II

Rozwiązania

Test, dzień pierwszy, grupa młodsza

1. Nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

.... jest nieprawdziwa dla dowolnych $a, b < 0$.

.... jest nieprawdziwa dla pewnych $a, b > 0$.

.... jest prawdziwa dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (niezerowych).

Odpowiedź:

- NIE, dla a = b = -1 nierówność jest prawdziwa.
- NIE, nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych $a, b > 0$. Istotnie, jest ona równoważna nierówności $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$. Po wymnożeniu nawiasów i uproszczeniu wyrazów podobnych dostajemy: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, co łatwo wykazać.
- NIE, wystarczy podstawić $a=-1, b=-2$ i dostajemy: $-\frac{3}{2} \geqslant -\frac{4}{3}$, co jest nieprawdą.

2. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas:

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p przez 4.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p przez 5.

.... istnieją dwie możliwe reszty z dzielenia p przez 6.

Odpowiedź:

- TAK, są to reszty 1 i 3, inne reszty pochodzą od liczb parzystych.
- NIE, przecież 7, 11, 13 mają trzy różne reszty z dzielenia przez 5.
- TAK, są to reszty 1 i 5, inne reszty pochodzą od liczb parzystych lub podzielnych przez 3.

3. Dany jest trójkąt ABC, który nie jest równoramienny. Z wierzchołka A prowadzimy odpowiednio: wysokość h_a, środkową s_a oraz dwusieczną t_a. Wówczas:

.... istnieje trójkąt ABC, gdzie wysokość h_a leży pomiędzy środkową s_a, a dwusieczną t_a.

.... istnieje trójkąt ABC, gdzie środkowa s_a leży pomiędzy dwusieczną t_a, a wysokością h_a.

.... istnieje trójkąt ABC, gdzie dwusieczna t_a leży pomiędzy wysokością h_a, a środkową s_a.

Odpowiedź:

- NIE, jeśli na prostej AB punkt E spodkiem wysokości h_a, to przy założeniu, że $|CE| > |EB|$ widzimy, że kąt CAE jest większy od kąta EAB. Zatem nie istnieje na odcinku EB taki punkt F (potencjalny spodek dwusiecznej), że kąty CAF i FAD są równe.
- TAK, wystarczy rozważyć trójkąt rozwartokątny.
- TAK, wystarczy rozważyć trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30°.

4. Czworokąt $ABCD$ jest taki, że trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB mają równe obwody.

.... czworokąt ten jest zawsze kwadratem.

.... czworokąt ten jest zawsze równoległobokiem.

.... czworokąt ten jest zawsze trapezem.

Odpowiedź: Musi to być zawsze prostokąt. Istotnie, sprawdźmy najpierw, że przekątne muszą być równe. Niech obwód trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB wynosi x, a obwód całego czworokąta. Wówczas dodając obwody trójkątów ABD i BCD widzimy, że $y = 2x - 2|BD|$. Analogicznie dostajemy, że $y = 2x - 2|AC|$. Stąd $|BD| = |AC|$. Stąd np. $|AB| + |BC| = |BC| + |CD| = x -$ przekątna. Zatem $|AB| = |CD|$. Podobnie $|BC| = |AD|$. Nasz czworokąt jest więc równoległobokiem o równych przekątnych. Warunki te spełnia dowolny prostokąt.

- NIE
- TAK
- TAK

5. Dane są dwa czworościany A_1, A_2, przy czym A_1 leży wewnątrz A_2. Wynika stąd, że:

.... objętość A_1 jest mniejsza niż objętość A_2.

.... sfera opisana na A_1 jest zawarta wewnątrz sfery opisanej na A_2.

.... suma krawędzi A_1 jest mniejsza niż suma krawędzi A_2.

Odpowiedź:

- TAK
- NIE, łatwo wskazać kontrprzykład gdy A_1, A_2 mają wspólną ścianę.
- NIE, załóżmy, że A_2 ma w postawie trójkąt równoboczny ABC o boku 1, a krawędzie boczne mają długość 1000. Wierzchołki A_1 wybieram tak, aby dwa leżały w odległości nie większej niż 1 od podstawy ABC czworościany A_2, zaś pozostałe dwa leżą w odległości co najmniej 999. Łatwo sprawdzić, że suma krawędzi tak uzyskanego A_1 jest większa niż 3003.

6. Każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ jest równa 1 lub -1. Rozważmy wyrażenie

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots x_{2008}x_{2009} + x_{2009}x_1.$$

Wówczas:

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = 0$

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2007$

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2009$

Odpowiedź:

- NIE, suma ma nieparzyście wiele składników, z których każdy jest liczbą całkowitą nieparzystą. Suma jest zatem nieparzysta.
- TAK, elementy o parzystych indeksach to 1, a o nieparzystych to -1.
- NIE, wówczas każdy z iloczynów $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{2008}x_{2009}, x_{2009}x_1$ musiałby wynosić -1. Wymnażając je wszystkie dostalibyśmy liczbę nieparzystą -1. Ale przecież:

$$(x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_4)\ldots(x_{2009}x_1) = x_1x_2^2x_3^2\ldots x_{2009}^2x_1 > 0.$$

Sprzeczność.

1. **Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 20.**

   Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2006, zadanie 2):

   Użycie w iloczynie liczby $n \geqslant 5$ jest nieopłacalne, gdyż zastąpienie jej przez liczby 2 i $n - 2$ powoduje zwiększenie iloczynu. Możemy nie używać czynnika równego 4, gdyż można go zastąpić dwiema dwójkami. Użycie jedynki jest również bezcelowe. Jeśli mamy co najmniej 3 dwójki, to lepiej je zastąpić 2 trójkami. Zatem szukany iloczyn składa się z trójek i co najwyżej 2 dwójek. Liczba $20 = 6 \cdot 3 + 2$, więc do największego iloczynu musimy wziąć dokładnie jedną dwójkę. Ostatecznie szukany iloczyn wynosi $2 \cdot 3^6$.

2. **Wyznaczyć najmniejszą możliwą dodatnią wielokrotność 15, której zapis w systemie dziesiętnym zawiera jedynie cyfry: 0 i 8.**

   Rozwiązanie (AIME):

   Wielokrotność 15 jest liczbą podzielną przez 3 i przez 5, a więc:

   - suma cyfr tej liczby musi być podzielna przez 3
   - cyfra jedności tej liczby musi być równa 0 lub 5

   Widzimy zatem, że szukana liczba ma w zapisie dziesiętnym przynajmniej 3 cyfry 8 i przynajmniej jedno 0 (cyfra jedności). Jest to zatem 8880.

3. **Ile jest parami nieprzystających trójkątów prostokątnych, ktorych przyprostokątne mają długości będące liczbami całkowitymi oraz pole jest trzykrotnie większe (co do wartości) od obwodu?**

   Rozwiązanie (AMC 12):

   Niech a, b będą długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego. Dostajemy wówczas równanie:

   $$\frac{ab}{2} = 3\left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

   Wszystko poza pierwiastkiem przenosimy na jedną stronę:

   $$ab - 6(a + b) = 6\sqrt{a^2 + b^2}.$$

   i podnosimy do kwadratu...

   $$a^2b^2 + 36a^2 + 36b^2 - 12a^2b - 12ab^2 - 72ab = 36(a^2 + b^2)$$

   Kwadraty się skracają. Z lewej strony można wyciągnąć ab przed nawias:

   $$ab(ab - 12a - 12b + 72) = 0.$$

   Jest jasne, że $ab \neq 0$, zatem pozostaje nam do rozwiązania równanie w liczhach całkowitych:

   $$ab - 12a - 12b + 72 = 0.$$

Możemy tu coś zwinąć i mamy:

$$(a-12)(b-12)=72.$$

To równanie ma kilka rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich:

$$(13,84),(14,48),(15,36),(16,30),(18,24),(20,21).$$

Jak widać dostaliśmy 6 parami nieprzystających trójkątów prostokątnych.

4. **Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby:**

$$\boldsymbol{n^2+n+1} \text{ oraz } \boldsymbol{n^2+n+3}$$

są pierwsze.

Rozwiązanie (V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, Etap II, Zadanie 3):

Dla $n=1$ obie liczby są pierwsze: wynoszą odpowiednio 3 i 5. Wykażemy, że dla $n \geqslant 2$ co najmniej jedna z liczb n^2+n+1, n^2+n+3 jest złożona. Jeśli liczba n jest podzielna przez 3 lub przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba $n^2+n+3=n(n+1)+3$ jest podzielna przez 3. Ponieważ liczba n^2+n+3 jest większa od 3, musi być złożona. Jeśli natomiast liczba n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to liczba n^2+n+1 jest podzielna przez 3. Dla $n \geqslant 2$ liczba n^2+n+1 jest większa od 3, a więc jest złożona.

5. **W turnieju tenisa stołowego wzieło udział 50 zawodników. Kazdy zawodnik rozegrał jeden mecz z kazdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy mozliwe jest, aby kazdy z uczestników wygrał te sama liczbe meczów?**

Rozwiązanie (IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, Etap II, zadanie 4):

Taka sytuacja nie jest możliwa. Przyjmijmy, że każdy zawodnik wygrał k meczów. Wówczas liczba wszystkich meczów wygranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi 50k. Z drugiej strony każdy zawodnik przegrał dokładnie 49-k meczów. Zatem liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50(49-k)$. Wobec tego $50k=50(49-k)$, skąd obliczamy $k=49/2$. Sprzeczność.