IV Warsztaty Matematyczne

I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Zadania i rozwiązania. Grupa młodsza.

Dzień drugi – 28.09.2010r.

Streszczenie

Przygotowując zadania opierałem się o zasoby zadaniowe pochodzące z następujących źródeł:

- Olimpiada Matematyczna (www.om.edu.pl)
- Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej (www.om.edu.pl)
- Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl)
- American Invitational Mathematics Examination (http://www.artofproblemsolving.com)
- Norway Niels Henrik Abels Math Contest (http://www.artofproblemsolving.com)
- „103 trigonometry problems"; Titu Andreescu, Zuming Feng; Birkhuser 2005.
- Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (http://cut-the-knot.org)

Część I

Zadania

Test, dzień drugi, grupa młodsza

1. Rozważmy liczbę $X = 2^{2010}$. Wówczas:

.... X jest sumą dwóch kolejnych liczb naturalnych

.... X jest sumą trzech kolejnych liczb naturalnych

.... X jest sumą czterech kolejnych liczb naturalnych

2. Jedna ze słynnych hipotez XVIII wiecznego matematyka Eulera została obalona w połowie lat 60' XX wieku, kiedy trójka matematyków amerykańskich pokazała, że istnieje liczba całkowita n taka, że $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$. Ile wynosiła liczba n?

.... 143

.... 145

.... 146

3. Ciąg rosnący $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ...$ zawiera wszystkie liczby całkowite dodatnie, które nie są kwadratami, ani sześcianami liczb całkowitych. Można powiedzieć, że:

.... dwudziesty pierwszy wyraz tego ciągu to 28

.... trzydziesty wyraz tego ciągu to 38

.... setny wyraz tego ciągu to 113

4. Bierzemy dwie liczby pierwsze $p < q$ większe od 2 i rozważamy różnicę pomiędzy iloczynem, a sumą tych liczb. Może ona wówczas wynosić

.... 21

.... 60

.... 119

5. Strony pewnej książki zostały ponumerowane liczbami od 1 do n. Gdy dodawano numery stron tej książki jedną ze stron policzono omyłkowo dwukrotnie. Uzyskana suma wyniosła 2010. Która strona książki została policzona dwukrotnie?

.... 43

.... 49

.... 57

6. Niech P, S_1, S_2 oznaczają odpowiednio: pole trójkąta ABC, pole koła wpisanego w ABC i pole koła opisanego na ABC. Wówczas

.... $\frac{1}{S_1+P} \geqslant \frac{1}{S_1+S_2} \geqslant \frac{1}{P+S_2}$.

.... iloraz S_2/P może być dowolnie dużą liczbą dodatnią

.... iloraz S_1/P może być dowolnie małą liczbą dodatnią

Konkurs, dzień drugi, grupa młodsza

1. Załóżmy, że $a < b < c < d < e$ są kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $b + c + d$ jest kwadratem liczby całkowitej, zaś $a+b+c+d+e$ jest sześcianem liczby całkowitej. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość c.

2. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o polu 1, zaś P dowolnym punktem w jego wnętrzu. Przez D, E, F oznaczamy rzuty prostokątne P odpowiednio na BC, CA i AB. Wykaż, że suma pól trójkątów BPD, CEP i FAP wynosi $\frac{1}{2}$.

3. Mając daną liczbę wymierną większą od 0, zapiszmy ją jako ułamek nieskracalny $q = \frac{a}{b}$. Oblicz ile liczb wymiernych z przedziału $(0, 1)$ ma tę własność, że iloczyn ab równy jest $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

4. Dany jest trójkąt ABC. Ze środka ciężkości O tego trójkąta (punkt przecięcia środkowych) prowadzimy proste OL, OM, ON równoległe do odpowiednio boków BC, AC i AB tak, że L leży na AB; M na BC, zaś N na AC. Udowodnić, że pola trójkątów BOL, COM i AON są równe.

5. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia, która ma sześć dodatnich dzielników nieparzystych i dwanaście dodatnich dzielników parzystych?

Część II

Rozwiązania

Test, dzień drugi, grupa młodsza

1. Rozważmy liczbę $X = 2^{2010}$. Wówczas:

.... X jest sumą dwóch kolejnych liczb naturalnych

.... X jest sumą trzech kolejnych liczb naturalnych

.... X jest sumą czterech kolejnych liczb naturalnych

Odpowiedź:

- NIE, liczba parzysta nie może być sumą liczby parzystej i nieparzystej
- NIE, suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3
- NIE, suma czterech kolejnych liczb naturalnych daje resztę 2 z dzielenia przez 4.

2. Jedna ze słynnych hipotez XVIII wiecznego matematyka Eulera została obalona w połowie lat 60' XX wieku, kiedy trójka matematyków amerykańskich pokazała, że istnieje liczba całkowita n taka, że $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$. Ile wynosiła liczba n?

.... 143

.... 145

.... 146

Odpowiedź: Łatwo sprawdzić, że szukana liczba musi się dzielić przez 3. Istotnie, jeśli liczba x ma jakąś resztę z dzielenia przez 3, to x^5 ma taką samą resztę z dzielenia przez 3. Ale $133+110+84+27 = 354$, co jest podzielne przez 3. Liczba $n = 144$.

- NIE
- NIE
- NIE

3. Ciąg rosnący $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ...$ zawiera wszystkie liczby całkowite dodatnie, które nie są kwadratami, ani sześcianami liczb całkowitych. Można powiedzieć, że:

.... dwudziesty pierwszy wyraz tego ciągu to 28

.... trzydziesty wyraz tego ciągu to 38

.... setny wyraz tego ciągu to 113

Odpowiedź:

- TAK Zauważmy, że poniżej 21 mamy 4 kwadraty i 2 sześciany, przy czym liczba 1 jest zarówno kwadratem jak i sześcianem. Zatem ten 21. wyraz to przynajmniej 26. Ale po drodze napotykamy kolejny kwadrat: 25, a więc 21. wyraz przynajmniej 27. Ale 27 jest sześcianem, a więc 21. wyraz ciągu to istotnie 28.
- TAK Zauważmy, że poniżej 30 mamy 5 kwadratów i 3 sześciany, przy czym liczba 1 jest zarówno kwadratem, jak i sześcianem. Xatem 30. wyraz ciągu to przynajmniej 37. Ale po drodze jest jeszcze kwadrat: 36, zatem 30. wyrazem naszego ciągu jest 38.

- NIE Zauważmy, że aż do 100 mamy 10 kwadratów i 4 sześciany, przy czym liczby 1 i 64 są zarówno kwadratami, jak i sześcianami. Zatem 100. wyraz ciągu to przynajmniej 112. Po drodze nie mamy jednak żadnego kwadratu ani sześcianu, zatem to rzeczywiście jest 112, a nie 113.

4. Bierzemy dwie liczby pierwsze $p < q$ większe od 2 i rozważamy różnicę pomiędzy iloczynem, a sumą tych liczb. Może ona wówczas wynosić

.... 21

.... 60

.... 119

Odpowiedź:

- NIE, $pq - p - q = (p-1)(q-1) - 1$. Zatem $(p-1)(q-1) = 22$. Zatem $p = 2, q = 23$, co odpada ze względu na założenie zadania, lub $p = 3, q = 12$, co odpada, bo 12 nie jest liczbą pierwszą. Podobnie znajdujemy odpowiedź pozytywną w punkcie c.
- NIE, iloczyn nieparzystych liczb pierwszych jest nieparzysty, a suma – parzysta. Zatem różnica musi być nieparzysta.
- TAK, dla $p = 11, q = 13$.

5. Strony pewnej książki zostały ponumerowane liczbami od 1 do n. Gdy dodawano numery stron tej książki jedną ze stron policzono omyłkowo dwukrotnie. Uzyskana suma wyniosła 2010. Która strona książki została policzona dwukrotnie?

.... 43

.... 49

.... 57

Odpowiedź: Suma pierwszych n liczba naturalnych to $\frac{n(n+1)}{2}$. Zatem $n(n+1)$ nie może przekraczać 4020. Widać więc, że $n < 63$. Iloczyn $62 \cdot 63 = 3906$, zatem jeśli $\frac{n(n+1)}{2} + x = 2010$, to dla $n = 62$ wartość x wynosi 57. Zauważmy, że jeśli n mniejsze niż 62, np. 61, to iloczyn $61 \cdot 62$ wynosi 3782, a więc liczba x byłałby tu większa niż liczba ponumerowanych stron. Zatem 57 to jedyna odpowiedź.

- NIE
- NIE
- TAK

6. Niech P, S_1, S_2 oznaczają odpowiednio: pole trójkąta ABC, pole koła wpisanego w ABC i pole koła opisanego na ABC. Wówczas

.... $\frac{1}{S_1+P} \geqslant \frac{1}{S_1+S_2} \geqslant \frac{1}{P+S_2}$.

.... iloraz S_2/P może być dowolnie dużą liczbą dodatnią

.... iloraz S_1/P może być dowolnie małą liczbą dodatnią

Odpowiedź:

- TAK, wiadomo, że $S_2 > P > S_1$. Zatem $S_2 + P > S_1 + S_1 > S_1 + P$. Są to liczby dodatnie, więc ich odwrotności muszą pozostawać w odwrotnym porządku.
- TAK, wyobrażmy sobie trójkąt równoramienny i opisany na nim okrąg. Weźmy średnicę okręgu będącą osią symetrii tego trójkąta. Jest ona osią symetrii całej rodziny trójkątów równoramiennych wpisanych w ten okrąg. Ich podstawy mogą być dowolnie małe, a wysokości nie są większe niż średnica. Stąd teza.
- TAK, wyobraźmy sobie trójkąt równoramienny i wpisany w niego okrąg. Rozważmy oś symetrii tego trójkąta. Zawiera ona średnicę okręgu wpisanego. Istnieje cała rodzina trójkątów równoramiennych opisanych na tym okręgu. Długość podstaw tych trójkątów jest nieograniczona, zaś długość ich wysokości jest ograniczona z dołu przez średnicę okręgu. Stąd teza.

1. **Załóżmy, że $a < b < c < d < e$ są kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $b + c + d$ jest kwadratem liczby całkowitej, zaś $a + b + c + d + e$ jest sześcianem liczby całkowitej. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość c.**

   Rozwiązanie (AIME):

   Zauważmy, że $b + c + d = 3c$, zaś $a + b + c + d + e = 5c$. Stąd szukamy najmniejszej liczby całkowitej dodatniej c, że $3c$ jest kwadratem, zaś $5c$ jest sześcianem. Skoro $3c$ jest kwadratem, to c jest podzielna przez 3. Skoro $5c$ jest sześcianem, to c jest podzielne przez 25. Wiemy, że c jest podzielne przez 3, a więc $5c$ też jest podzielne przez 3. $5c$ jest sześcianem, więc musi być podzielne przez 27. Widzimy więc, że liczba c jest równa co najmniej $3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25$. Nietrudno sprawdzić, że liczba ta spełnia wymagania zadania.

2. **Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o polu 1, zaś P dowolnym punktem w jego wnętrzu. Przez D, E, F oznaczamy rzuty prostokątne P odpowiednio na BC, CA i AB. Wykaż, że suma pól trójkątów BPD, CEP i FAP wynosi $\frac{1}{2}$.**

   Rozwiązanie (Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 2008, DD 3):

   Przez punkt P prowadzimy proste równoległe do kolejnych boków trójkąta ABC. Dzielą one trójkąt na 3 trójkąty i 3 czworokąty. Część wspólna każdej z tych figur z trójkątami $BPD, CEPiFAP$ ma pole równe dokładnie 1/2 wyjściowej figury. Zatem suma pól trójkątów BPD, CEP, FAP wynosi 1/2.

3. **Mając daną liczbę wymierną większą od 0, zapiszmy ją jako ułamek nieskracalny $q = \frac{a}{b}$. Oblicz ile liczb wymiernych z przedziału $(0, 1)$ ma tę własność, że iloczyn ab równy jest $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.**

   Rozwiązanie (AIME):

   Jeśli ułamek a/b ma być nieskracalny, to w liczniku i w mianowniku nie może wystąpić ta sama liczba pierwsza z rozkładu liczby 6! na czynniki pierwsze. Ma on postać: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Łatwo zatem sprawdzić, że istnieją cztery możliwości: $\frac{2^4}{3^2 \cdot 5}, \frac{3^2}{2^3 \cdot 5}, \frac{5}{3^2 \cdot 5}, \frac{1}{6!}$.

4. **Dany jest trójkąt ABC. Ze środka ciężkości O tego trójkąta (punkt przecięcia środkowych) prowadzimy proste OL, OM, ON równoległe do odpowiednio boków BC, AC i AB tak, że L leży na AB; M na BC, zaś N na AC. Udowodnić, że pola trójkątów BOL, COM i AON są równe.**

   Rozwiązanie (Cut The Knot):

   Korzystamy z faktu, że punkt przecięcia środkowych dzieli je w stosunku 2:1. Niech N' leżący na CB należy do prostej ON, analogicznie definiujemy M' i L'. Niech s_A, s_A, s_A będą długościami środkowych wypuszczanych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Z twierdzenia Talesa: $2 : 3 = |CO|/d_C = |CN'|/|CB| = |CN|/|CA|$. Zatem trójkąt CNN' jest, na mocy cechy bkb, podobny do trójkąta CAB w skali 2:3. W analogiczny sposób wykazujemy, że do trójkąta CAB

podobne są, w skali 2:3 trójkąty $MM'B$ oraz $L'AL$. Zatem $CNN', MM'B$ i $L'AL$ są przystające. Wykażemy teraz, że trójkąty BLO i COM mają równe pola. Analogicznie będzie z pozostałymi dwiema równościami. Skoro trójkąty CNN' i $MM'B$ są przystające, to mają równe pola. Równe są zatem pola czworokątów $CNOM$ oraz $OM'BN'$. Jednak trójkąty $L'NO$ oraz $OM'L$ są przystające (są podobne do CAB w skali 1:3 - znowu z własności środkowych). Zatem równe są także pola równoległoboków $CL'OM$ i $BN'OL$. Stąd równe są pola COM i BLO. Analogicznie uzyskujemy pozostałe równości.

5. **Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia, która ma sześć dodatnich dzielników nieparzystych i dwanaście dodatnich dzielników parzystych?**

Rozwiązanie (AIME):

Załóżmy, że szukana liczba to x. Udowodnimy na początek, że liczba ta dzieli się przez 4, ale nie dzieli się przez 8. Istotnie, zauważmy, że każdemu dzielnikowi nieparzystemu m liczby x odpowiadają dzielniki parzyste 2m oraz 4m. A więc dzielników parzystych jest w ten sposób dwa razy więcej. Liczba x nie może dzielić się przez 8, bo wówczas dzielników parzystych liczby x byłoby 3 razy więcej niż nieparzystych. Zatem x = 4y, gdzie y jest liczbą nieparzystą o dokładnie 6 dzielnikach.

Jeśli liczba y ma 6 dzielników nieparzystych, to musi mieć mniej niż 3 różne nieparzyste dzielniki pierwsze. Inaczej będzie miała za dużo dzielników nieparzystych. Rozważamy pozostałe przypadki:

- y ma jeden nieparzysty dzielnik pierwszy p

  Wtedy aby mieć 6 dzielników nieparzystych y musi być postaci $y = p^5$. Najmniejsze możliwe p to 3, a wiec y ma w tym przypadku przynajmniej 3^5

- y ma dwa nieparzyste dzielniki pierwsze $p < q$.

  Wtedy aby mieć 6 dzielników nieparzystych jedna z liczb pierwszych musi występować w rozkładzie na czynniki pierwsze dwa razy. Szukamy najmniejszego y, więc bierzemy p. Zatem $y = p^2q$. Taka liczba ma 6 dzielników: $1, p, p^2, q, pq, p^2q$. W tym przypadku y to przynajmniej $3^2 \cdot 5 = 45$.

Widzimy więc, że minimalne możliwe y to 45. A szukana liczba wynosi zatem $4 \cdot 45 = 180$.