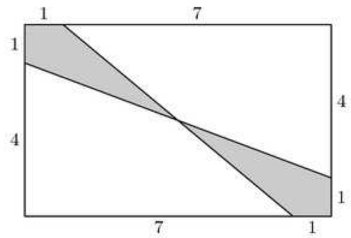
ZADANIA TESTOWE - grupa młodsza. Dzień pierwszy.

Przy każdej z odpowiedzi (A), (B), (C) należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

1. Długości krawędzi prostopadłościennego pudełka są liczbami całkowitymi będącymi w stosunku 1 : 3 : 4. Która z poniższych wielkości może być objętością tego pudełka?

   (A) 48 (B) 96 (C) 324

2. Ile wynosi pole zacieniowanego obszaru zawartego w prostokącie o rozmiarach 8×5?



   (A) 5 (B) 6.5 (C) 8

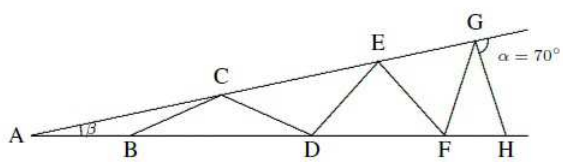
3. Znajdź cyfrę dziesiątek liczby $2015^{2016} - 2017$.

   (A) 2 (B) 3 (C) 8

4. Zosia wypisała na kartce kolejne liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots, 99, 100$. Następnie skreśliła 1, ominęła liczbę 2, skreśliła 3, ominęla 4 i w ten sposób skreślając i omijając doszła do końca listy. Następnie wróciła na początek, skreśliła pierwszą nieskreśloną liczbę (czyli 2), ominęła kolejną (4), skreśliła 6 i tak dalej (wracając kilka razy na początek listy). Jaka liczba zostanie skreślona jako ostatnia?

   (A) 64 (B) 72 (C) 96

5. Jaka jest miara kąta β jeśli wiemy, że $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH$?



   (A) 5° (B) 8° (C) 15°

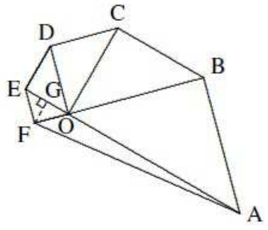
6. Na ile sposobów można zapisać liczbę 2016 jako sumę dwójek i trójek, ignorując kolejność składników (przykładami takich sum są $1008 \cdot 2 + 0 \cdot 3$ lub $402 \cdot 2 + 404 \cdot 3$)?

   (A) 336 (B) 337 (C) 672

ZADANIA OTWARTE - grupa młodsza. Dzień pierwszy.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Rysunek poniżej pokazuje sześciokąt $ABCDEF$ utworzony z pięciu trójkątów prostokątnych równoramiennych ABO, BCO, CDO, DEO, EFO oraz trójkąta AOF, gdzie punkt O jest na przecięciu prostych BF oraz AE. Wiedząc, że $OA = 8$ oblicz pole trójkąta AOF.



2. Wiadomo, że liczby całkowite $a, b \neq 0$ spełniają równość

$$\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3}.$$

Znajdź wszystkie możliwe a, b.

3. Szachownicę o rozmiarach 6×6 pokryto (w całości) kostkami o rozmiarach 1×2. Pokazać, że niezależnie od rozkładu kostek można tak rozciąć tę szachownicę na dwie prostokątne części o całkowitych długościach boków, że żadna z pokrywających ją kostek 1×2 nie zostanie złamana.

ZADANIA TESTOWE - grupa młodsza. Dzień drugi.

Przy każdej z odpowiedzi (A), (B), (C) należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

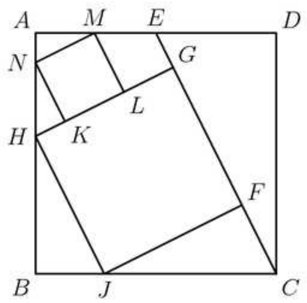
1. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$. Wówczas liczba $p^2 - 1$:

   (A) jest podzielna przez 4 (B) jest podzielna przez 6 (C) jest podzielna przez 24

2. Dane są dwa trójkąty równoramienne T_1 oraz T_2 o równych polach i obwodach. Niech r_1, r_2 będą promieniami okręgów wpisanych, a R_1, R_2 – promieniami okręgów opisanych odpowiednio na T_1 i T_2. Wówczas:

   (A) T_1 i T_2 są przystające (B) $r_1 = r_2$ (C) $R_1 = R_2$

3. Punkt E jest środkiem boku AD kwadratu $ABCD$. Punkty F, G leżą na odcinku CE zaś punkty H, J leżą odpowiednio na odcinkach AB i BC tak, że $FGHJ$ jest kwadratem (patrz rysunek niżej). Punkty K, L leżą na GH zaś M, N leżą odpowiednio na AD oraz AB tak, że $KLMN$ jest kwadratem. Niech P_1, P_2, P_3 to pola kwadratów $ABCD, FGHJ, KLMN$. Wówczas:



   (A) $P_1/P_2 = P_2/P_3$ (B) $P_2/P_3 \in \mathbb{Q}$ (C) $P_1/P_2 \in \mathbb{Q}$

4. Niech a, b będą liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi nierówność $\frac{ab+1}{a+b} < \frac{3}{2}$. Wówczas o wyrażeniu $\frac{a^3b^3+1}{a^3+b^3}$ można powiedzieć, że jest:

   (A) mniejsze niż 4 (B) mniejsze niż 6 (C) mniejsze niż 8

5. W lidze złożonej z 12 drużyn każda drużyna gra z każdą dokładnie raz. Mecz kończy się albo zwycięstwem jednej z drużyn, albo remisem. Za każde zwycięstwo drużyna otrzymuje 2 punkty, za remis 1 punkt, za porażkę 0 punktów. Wynikiem drużyny nazywamy sumę jej punktów po rozegraniu całych rozgrywek. Wówczas

   (A) liczba wyników parzystych jest parzysta

   (B) liczba wyników nieparzystych jest parzysta

   (C) suma wszystkich wyników to 130 punktów.

6. O równaniu $||||x - 1| - 1| - 1| - 1| = 0$ możemy powiedzieć, że:

   (A) ma więcej niż jedno rozwiązanie

   (B) ma więcej niż trzy rozwiązania

   (C) ma rozwiązania niedodatnie.

ZADANIA OTWARTE - grupa młodsza. Dzień drugi.

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Rozstrzygnij czy istnieje czworokąt wypukły, który nie jest trapezem, a jego przekątne dzielą go na cztery trójkąty równoramienne. Odpowiedź uzasadnij.

2. Szachownicę o wymiarach 14×14 pokryto 98 kostkami domina (rozmiaru 1×2). Udowodnij, że można rozciąć tę szachownicę na dwie prostokątne części o rozmiarach będących liczbami całkowitymi tak, że rozcięte zostaną przy tym co najwyżej dwie kostki domina.

3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^{2016} = b + b^{2016} \\ b^{2016} = c + c^{2016} \\ c^{2016} = d + d^{2016} \\ d^{2016} = e + e^{2016} \\ e^{2016} = a + a^{2016} \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych a, b, c, d, e.

ZADANIA TESTOWE - grupa młodsza. Dzień trzeci.

Przy każdej z odpowiedzi (A), (B), (C) należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

1. Pewien miesiąc ma 31 dni. W miesiącu tym poniedziałek i środa wypadają tyle samo razy. Wówczas:

.... miesiąc ten może zacząć się we wtorek lub w czwartek

.... miesiąc ten musi się zacząć w poniedziałek, wtorek lub środę

.... poniedziałek może wypaść 3., 6. lub 7 dnia miesiąca.

2. W pewnym biurze gdy szef pisze list, wkłada go do koperty i kładzie na szczycie sterty dokumentów będących na biurku swojej sekretarki. Kiedy sekretarka ma wolną chwilę, bierze list znajdujący się na szczycie sterty i wysyła go dalej. Załóżmy, że szef napisał dzis pięć listów i przynosił je sekretarce w kopertach oznaczonych kolejno numerami 1, 2, 3, 4, 5. Który z poniższych układów może opisywać kolejność, w której sekretarka rozsyłała dalej napisane przez szefa listy?

.... 2 4 3 5 1

.... 4 5 2 3 1

.... 5 4 3 2 1

3. Niech x, y, z, n będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas układ równań o niewiadomych x, y, z

$$\begin{cases} nx + y = 1 \\ ny + z = 1 \\ x + nz = 1 \end{cases}$$

.... może nie mieć rozwiązań, dla pewnego n,

.... ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie zależne od n,

.... dla pewnych n ma nieskończenie wiele rozwiązań.

4. Zbiór $\{18, 19, 20, 21, 22\}$ ma dwie własności: składa się z kolejnych liczb naturalnych oraz suma jego elementów równa jest 100. Ile podzbiorów liczb naturalnych ma te dwie własności?

.... dokładnie jeden

.... więcej niż jeden

.... więcej niż dwa

5. Wartość wyrażenia $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ równa jest

.... mniej niż 1

.... dokładnie 2

.... więcej niż 2

ZADANIA TESTOWE - grupa starsza. Dzień trzeci.

Przy każdej z odpowiedzi (A), (B), (C) należy umieścić odpowiedź T (prawda) lub N (fałsz)

6. Niech P, S_1, S_2 oznaczają odpowiednio: pole trójkąta ABC, pole koła wpisanego w ABC i pole koła opisanego na ABC. Wówczas

.... $\frac{1}{S_1+P} \geqslant \frac{1}{S_1+S_2} \geqslant \frac{1}{P+S_2}$.

.... iloraz S_2/P może być dowolnie dużą liczbą dodatnią

.... iloraz S_1/P może być dowolnie małą liczbą dodatnią

7. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$ będą liczbami pierwszymi takimi, że

$$X = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4.$$

Wówczas:

.... ciąg ten musi zawierać liczbę 5

.... X jest podzielne przez 5

.... najmniejsza możliwa wartość p_5 to 29.

8. Każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ jest równa 1 lub -1. Rozważmy wyrażenie

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots x_{2008}x_{2009} + x_{2009}x_1.$$

Wówczas:

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = 0$

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2007$

.... istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, że $S = -2009$

9. Bierzemy dwie liczby pierwsze $p < q$ większe od 2 i rozważamy różnicę pomiędzy iloczynem, a sumą tych liczb. Może ona wówczas wynosić

.... 21

.... 60

.... 119

10. Na imprezie jest 6 chłopaków i pewna liczba dziewczyn. Niektore pary chłopców i dziewczyn łączy znajomość. Każdy chłopiec jest znajomym co najwyżej 3 dziewczyn. Dwie dziewczyny mają dokładnie 4 znajomych chłopców, a pozostałe mają dokładnie po 2 znajomych chłopców. Ile może być maksymalnie dziewczyn na tej imprezie?

.... 7

.... 8

.... więcej niż 8