KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza.

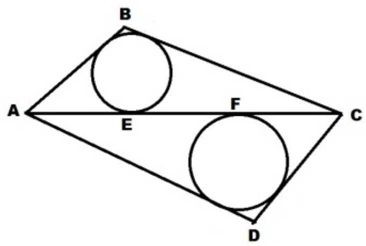
Dzień pierwszy. Czas: 120 minut

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

Zadanie 1. *Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie* n*, dla których liczba* $3^{n-1} + 5^{n-1}$ *jest podzielna przez* $3^n + 5^n$.

Zadanie 2. *W Starej Republice znajduje się nieparzysta liczba zamieszkanych planet. Niektóre pary planet są połączone przez loty Federacji Handlowej, inne nie. Każda zamieszkana planeta ma przynajmniej jedno połączenie z inną zamieszkaną planetą. Wiadomo też, że jeśli dwie planety* X, Y *mają połączenia z planetą* Z*, to* X *oraz* Y *muszą mieć różną liczbę połączeń ze wszystkimi planetami. Pokazać, że w Starej Republice istnieje planeta połączona z dokładnie dwiema innymi planetami.*

Zadanie 3. *Czworokąt wypukły* $ABCD$ *ma boki długości odpowiednio:* $|AB| = 2$, $|BC| = 8$, $|CD| = 6$, $|DA| = 7$. *Przekątna* AC *dzieli ten czworokąt na trójkaty* ABC *oraz* ACD. *W każdy z nich wpisujemy okrąg. Punkty styczności tych okręgów z przekatną* AC *oznaczamy odpowiednio jako* E *oraz* F. *Znajdź długość odcinka* EF.



Zadanie 4. *Każdy punkt kratowy płaszczyzny pomalowano na zielono albo czerwono, przy czym każdy z tych dwóch kolorów został użyty do pomalowania co najmniej jednego punktu. Udowodnij, że istnieją dwa punkty odległe o 5 pomalowane róznymi kolorami. Uwaga: punkt kratowy to punkt o obu współrzędnych całkowitych.*

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza.

Dzień drugi. Czas: 120 minut

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

Zadanie 1. *Pewne nieduże królestwo ma kształt kwadratu o polu 1200 kilometrów kwadratowych. Przez królestwo to przebiega dziewięc prostych dróg. Każda z nich przecina przeciwne granice krolestwa i dzieli je na dwa obszary o polach* 400 *i* 800 *kilometrów kwadratowych. Udowodnić, że istnieje w tym królestwie punkt, gdzie spotykają się wszystkie trzy drogi.*

Zadanie 2. *Odległość punktu P od wierzchołków A, B trójkąta równobocznego ABC równa jest odpowiednio: $|PA| = 2$ oraz $|PB| = 3$. Znajdź największą możliwości wartość $|PC|$.*

Zadanie 3. *Wykaż, że* 5 *jest jedyną liczbą pierwszą o tej własności, że $p^2 + 4$ oraz $p^2 + 6$ są liczbami pierwszymi.*

Zadanie 4. *Na wystpie Kombinatorion znajdują się 72 palmy, wyznaczające wierzchołki wielokąta foremnego. Na początku na jednej z nich siedzą 72 małpy. Jeśli na jakimś drzewie siedzą co najmniej dwie małpy to mogą przeskoczyć: jedna na sąsiednie drzewo po lewej, a druga na sąsiednie drzewo po prawej. Czy możliwe jest, aby w pewnym momencie na każdej palmie siedziała dokładnie jedna małpa?*

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza.

Dzień trzeci. Czas: 120 minut

- Podpisz każdą kartkę CZYTELNIE imieniem, nazwiskiem i klasą.
- Każde rozwiązanie napisz na ODDZIELNEJ (podpisanej) kartce.
- NIE ROZWIĄZUJ zadań na kartce, którą zamierzasz oddać! Przepisz rozwiązanie na osobnej kartce.
- WYJAŚNIJ argumenty i rachunki, które używasz, nawet jeśli wydają Ci się oczywiste.

Zadanie 1. *Galaktyczne Imperium atakuje planetę Naboo przy pomocy pewnej liczby automatycznych dronów bojowych. Flota broniąca planetę liczy sobie 101 statków. Decyzją dowódcy floty część statków będzie użyta jako niszczyciele, każdy wyposażony na początku w jedną rakietę, a część statków jako zaopatrzenie. Niszczyciel przy pomocy ataku rakietą niszczy jednego drona. Podczas ataku każdy statek z zaopatrzeniem będzie miał czas, aby dostarczyć każdemu niszczycielowi dokładnie jedną rakietę, ale nie więcej. W jaki sposób dowódca powinien podzielić flotę (ile niszczycieli, a ile statków z zaopatrzeniem) aby zniszczono maksymalną liczbę dronów. Ile wynosi ta liczba?*

Zadanie 2. *Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od* 1 *do* 24. *W jednym ruchu możemy wymazać dowolne dwie liczby* x *i* y, *a zamiast nich zapisać liczby* $\frac{3x+4y}{5}$ *oraz* $\frac{4x-3y}{5}$. *Udowodnij, ze na tablicy nie może się pojawić liczba większa od* 70.

Zadanie 3. *Wewnątrz równoległoboku* $ABCD$ *znajduje się taki punkt* E, *że* $AE = DE$ *oraz* $\angle ABE = 90^\circ$. *Punkt* M *jest środkiem odcinka* BC. *Wyznacz miarę kąta* DME.

Zadanie 4. *Udowodnij, że równanie* $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6 + h^6 = 9n^6$ *nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych* $a, b, c, d, e, f, g, h, n$.