

Liga Obozowa

Noc 1.

1. Dodano 6 liczb, z których każda następna miała o jedną cyfrę więcej niż poprzednia i otrzymano 1111104. Jakie liczby dodawano?

2. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1).$$

3. Udowodnij, że jeżeli $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$, to

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

4. Trzem znajomym logikom: Abackiemu, Babackiemu i Cabackiemu włożono na głowę (gdy mieli zamknięte oczy) kapelusze wybrane z pudła, w którym (o czym wiedzieli) były dwa białe, dwa czarne i trzy czerwone kapelusze. Gdy otworzyli oczy i przyjrzeni się kolegom, zapytano Abackiego: „Czy wiesz, jakiego kapelusza nie masz na głowie”? Ten odpowiedział, że nie wie. Następnie zadano to samo pytanie Babackiemu i on również odpowiedział, że nie wie. Jakiego koloru kapelusza miał na głowie Cabacki?

Noc 2.

1. Czy wśród liczb $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots 1}_n, \dots$ jest liczba podzielna przez 2009?

2. Z punktu M poprowadzono styczną do okręgu w punkcie N oraz sieczną przecinającą ten okrąg w punktach K, L ($|ML| < |MK|$). Udowodnij, że jeśli $|ML| = |NL|$, to $|KN| = |NM|$.

3. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Znaleźć:

$$\underbrace{f(\dots f(f(19)))}_{2009}.$$

4. Liczbę naturalną większą od 1 nazywamy bezkwadratową, gdy nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby naturalnej większej od 1. Czy istnieje nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny liczb bezkwadratowych?

Noc 3.

1. W nierównoramiennym trójkącie ABC odcinek CO jest środkową, a CP – wysokością położoną wewnątrz kąta ACB . Udowodnić, że jeżeli kąty ACO i PCB są równe, to kąt ACB jest prosty.

2. Na trójkącie ABC opisano okrąg. Cięciwy łączące środki łuku AC ze środkami łuków AB i BC w punktach D i E . Udowodnij, że odcinek DE jest równoległy do AC i przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba: $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ jest pierwsza.

4. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i spełniają warunek $NWD(m, n) + NWW(m, n) = m + n$. Udowodnić, że jedna z liczb m lub n dzieli się przez drugą.