Konkurs zadaniowy

21 – 22 września 2009

Dzień 1.

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie:
$$a^2 + b^2 = 8c + 6.$$

2. Wykazać, że dla dowolnego n naturalnego liczba $n!$ nie jest podzielna przez 2^n.

3. Dane są liczby całkowite a, b, c, d, e, dla których wiadomo, że $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$ jest podzielne przez 9. Wykaż, że przynajmniej jedna z liczb a, b, c, d, e też jest podzielna przez 3.

4. Dane są liczby naturalne m, n i zachodzi podzielność $mn \mid m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby naturalnej. Wskazówka. Udowodnij, że $(m, n)^2 = (m^2, n^2)$.

5. Znaleźć najdłuższy ciąg jednakowych cyfr różnych od zera, którymi może kończyć się zapis (dziesiętny) kwadratu liczby całkowitej. Wskazówka. $38^2 = ...$

Dzień 2.

1. Dowieść, że wśród 11 różnych liczb całkowitych istnieje 6, których suma jest podzielna przez 6. Wskazówka. Rozwiązać to samo zadanie dla 5 różnych liczb i podzielności przez 3.

2. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i dowolnej liczby pierwszej p liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona.

3. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2009$, że w ciągu:
$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{2009}$$
każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

4. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y, spełniających równanie:
$$(x + y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$
Wskazówka. Kiedy $xy \geqslant x + y$?

5. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2+3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wskazówka. Popatrzeć na reszty z dzielenia przez 3 i 9.

Szkice rozwiązań zadań 1. dnia

1. Zauważyć, że suma kwadratów nie może dawać reszty 6 z dzielenia przez 8.

2. Zauważyć, że jeśli $x \in \mathbb{N}$, to zbiór reszt z dzielenia x^3 przez 9 równy jest $\{-1, 0, 1\}$. Zauważmy, że suma pięciu elementów tego zbioru jest zerem tylko wtedy, gdy jednym ze składników jest zero.

3. Wystarczy, by $ord_2(n!) < n$. Podstawiamy do udowodnionego na wykładzie wzoru i mamy:

$$ord_2(n!) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots < n.$$

   Ostatnia nierówność jest ostra, ponieważ suma określająca ord jest zawsze skończona, a n to w tym przypadku suma szeregu geometrycznego nieskończonego.

4. Dowód wskazówki jest natychmiastowy:

$$ord_p((m^2, n^2)) = \max(ord_p(m^2), ord_p(n^2)) = \max(2ord_p(m), 2ord_p(n)) = 2ord_p((m, n)) = ord_p((m, n)^2).$$

   Niech $d = (m, n)$. Wtedy $d^2 = (m^2, n^2)$. Stąd skoro $d^2 \mid mn$ oraz $d^2 \mid m^2 + n^2$, to $d^2 \mid m$. Jednocześnie m jest dzielnikiem $m^2 + n^2 + mn$, a więc też dzielnikiem n^2. Skoro m dzieli zarówno m^2 jak i n^2, to dzieli też ich NWD, zatem $m \mid d^2$. Stąd $m = d^2$.

5. Kwadrat na pewno nie kończy sie cyframi 2, 3, 7, 8. Nie może sie kończyć na 11, 55 i 99 (bo dawałby resztę 3 z dzielenia przez 4) ani na 66 (bo byłby parzysty i niepodzielny przez 4). Zatem zostaje cyfra 4. Mamy $38^2 = 1444$. Gdyby kwadrat kończył się czterema czwórkami, to podzielony przez 4, także byłby kwadratem i kończyłby się na 11. Odpowiedź: ...444.

Szkice rozwiązań zadań 2. dnia

1. Pokażemy najpierw, że wśród każdych 5 różnych liczb całkowitych są 3, których suma jest podzielna przez 3. Istotnie, wśród 5 różnych liczb są 3 z taką samą resztą z dzielenia przez 3, a więc ich suma dzieli się przez 3. Weźmy teraz nasze 11 liczb. Wybierzmy 3 liczby, których suma s_1 dzieli się przez 3. Zostało nam 8. Z nich wybierzmy 3 tak, by dostać sumę s_2 podzielną przez 3. Z pozostałych 5 wybieramy 3 tak, by ich suma s_3 znowu dzieliła się przez 3. Wśród otrzymanych sum s_1, s_2, s_3 dwie są tej samej parzystości, a zatem suma pewnych dwóch jest podzielna przez 6.

2. (Zadanie 5. z I. etapu LII OM) Gdy p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to rozbijamy na iloczyn ze wzoru skróconego mnożenia i pokazujemy, że każdy z czynników jest większy od 1. Gdy $p = 2$ dostajemy n^4+4. To ma rozkład postaci $(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$. Skoro $n \geqslant 2$, to obydwa czynniki są większe od 1.

3. (Zadanie 1. z II. etapu LIV OM)Liczba $\binom{n}{k+1}$ jest podzielna przez $\binom{n}{k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1$$

jest liczbą całkowitą. Zatem liczba n spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy $n+1$ jest podzielna przez każdą z liczb od 1 do 2009. Przykładem takiej liczby jest $2009! - 1$.

4. (Zadanie 1. z I. etapu LIV OM) Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ mamy

$$xy = x\frac{y}{2} + y\frac{x}{2} \geqslant x + y.$$

Zatem dla liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ spełnione są nierówności:

$$2(xy)^2 + 1 > (xy)^2 \geqslant (x+y)^2,$$

co oznacza, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych $\geqslant 2$. Z ręcznego sprawdzenia pozostałych przypadków otrzymamy pary rozwiązań $(2,1), (1,2)$.

5. (Zadanie 8. z I. etapu LIII OM) Należy zauważyć, że kwadrat liczby całkowitej nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3 ani reszty 3 z dzielenia przez 9. Jeśli teraz liczba n nie jest podzielna przez 3, to liczba $2n^2+3$, a co za tym idzie liczba $S(2n^2+3)$, daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2. A więc nie jest kwadratem. Jeśli n nie jest podzielna przez 3, to $2n^2+3$ a zarazem $S(2n^2+3)$, daje przy dzieleniu przez 9 resztę 3. To także nie może być kwadrat.