

# Konkurs zadaniowy dla młodszych

## Dzień 1.

1. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  liczba  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  jest podzielna przez 10.
2. Która z liczb jest większa:  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  czy  $\sqrt{10}$ ?
3. Wykazać, że:
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{99}{100}.$$
4. Wykazać, że żadna suma liczb trzycyfrowych postaci

$$ABC + BCA + CAB$$

nie jest kwadratem liczby naturalnej.

5. W równoległoboku  $ABCD$  obrano na boku  $BC$  punkt  $F$ . Prosta  $AF$  przecina przekątną  $BD$  w punkcie  $E$ , a prosta  $DC$  w punkcie  $G$ . Udowodnij, że  $|AE| = \sqrt{EF \cdot EG}$ .

## Dzień 2.

1. Wiek syna ojca i dziadka wyraża się liczbami naturalnymi. Syn jest o tyle młodszy od ojca, o ile ojciec jest młodszy od dziadka. Ponadto dziadek jest sześć razy starszy od wnuka, który nie ma 10 lat. Ile lat ma każdy z nich?
2. Niech  $W, S, K$  oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, ścian i krawędzi wielościanu. Oblicz  $W + S - K$  gdy wielościan jest ostrosłupem  $n$ -kątnym.
3. Okrąg podzielono na trzy łuki w stosunku  $5 : 6 : 7$  i przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Styczne przecięły się w trzech punktach, które są wierzchołkami trójkąta. Oblicz miary kątów tego trójkąta.
4. Matylda ma jedną tabliczkę czekolady złożoną z  $40 = 5 \times 8$  małych kwadratowych kostek. Dziś spotkała się z przyjaciółkami i kolejno częstuje je dzieląc tabliczkę na dwie części wzdłuż jednego rowka poziomego albo pionowego, jedną część daje pierwszej, a drugą ponownie dzieli na dwie części wzdłuż rowka i jedną z nich daje drugiej przyjaciółce. Z pozostałą częścią czekolady postępuje tak samo, aż zostanie jej jedna kwadratowa kostka, którą oddaje przyjaciółce. Ile przyjaciółek, co najwyżej, mogła ona w ten sposób poczęstować tą tabliczką czekolady?
5. Dla jakich  $n$  naturalnych wyrażenie postaci:

$$\frac{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1}{n + 1}$$

przedstawia liczbę naturalną?