Eliminacje szkolne do III Warsztatów I LO

Czas rozwiązywania zadań - 100 minut

21.09.2009r.

1. Kasia ma w swoim wielkim terrarium 539 czerwonych, 607 niebieskich i 666 zielonych kameleonów. Kiedy spotkają się dwa różne kameleony, zmieniają kolor na ten trzeci. Czy mozliwe jest, aby w pewnej chwili wszystkie kameleony były jednego koloru?

2. Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ostrokątnym ABC, zaś I – środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Półprosta AI przecina okrąg o ponownie w punkcie D. Wykazać, że $|BD| = |CD| = |ID|$.

3. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci
$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}^{n-5} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
gdzie co najmniej jeden ze współczynników $a_{n-3}, a_{n-4}, a_{n-5}, \ldots, a_1, a_0$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych (pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + 2yz + 5x = 2 \\ y^2 + 2zx + 5y = 2 \\ z^2 + 2xy + 5z = 2 \end{cases}$$

5. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć resztę z dzielenia $\binom{2p}{p}$ przez p.

Wskazówki do rozwiązań

1. Odpowiedź brzmi: NIE. Łączna ilość kameleonów jest liczbą podzielną przez 3. Zatem gdyby wszystkie uzyskały w końcu jeden kolor, wówczas ilość kameleonów każdego koloru byłaby liczbą podzielną przez 3. Tymczasem na początku ilość gadów w róznych kolorach daje 3 różne reszty z dzielenia przez 3. Łatwo sprawdzić, że zmiana koloru (w którąkolwiek stronę) nie zmienia tego stanu – ilości gadów w różnych kolorach dalej dają 3 różne reszty z dzielenia przez 3. Stąd nie dojdziemy do stanu, w którym wszystkie będą w jednym kolorze.

2. AD jest dwusieczną kąta $\measuredangle BAC$, stąd natychmiast $|BD| = |CD|$. Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym $\measuredangle AIB = 2\measuredangle ADB$, a stąd trójkąt BID jest równoramienny.

3. Założyć przeciwnie. Skorzystać z wzorów Viete'a. Wynika z nich, że pierwiastki spełniają równości:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = 0.$$

Stąd wszystkie są zerami, a więc wielomian jest postaci x^n. Sprzeczność.

4. Sprawdzić przypadki, gdy liczby są równe lub parami równe. Gdy nie są, odejmować stronami i otrzymać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi (nie ma on rozwiązań). Otrzymane w trywialnych przypadkach rozwiązania podstawiać do wyjściowego układu (nie zawsze spełniają).

5. Reszta to 2. Są dwie możliwe drogi wykazywania.

   - Zauważyć, że jeśli k jest mniejsze od $2p$ i różne od p, wówczas $\binom{2p}{k}$ jest podzielny przez p, dalej zaś wykorzystać wzór dwumianowy $(1+1)^{2p}$.
   - Skorzystać z twierdzenia Wilsona i wychodzi samo :)