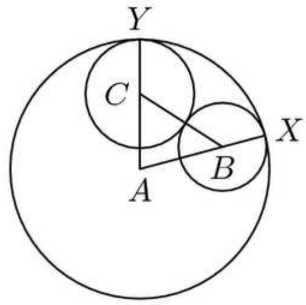
Sto łatwych (choć nie tylko) zadań na wakacje

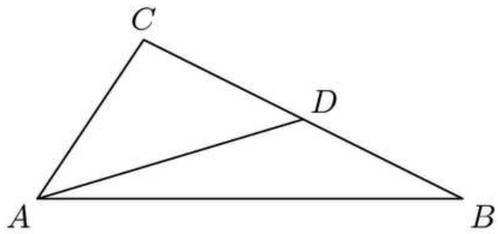
Zródło: dyskusja na AOPS (One Hundred Geometry Problems – Bridging the Olympiad Gap), tłumaczenie i skład: AM.

Poniżej zebrane jest 100 zadań z Olimpiad z całego świata. Początek jest bardzo łatwy, ale całość kończy na poziomie około IMO Shortlist. Tłumaczenie wykonałem na podstawie pliku użytkownika djmathman z AOPS. Korzystałem lub przerabiałem (a czasem też tworzyłem) rysunki w oparciu o prace wielu osób z AOPS. Oczywiście nie gwarantuję, że sam materiał z lekcji wystarczy, żeby wszystko umieć zrobic. Ale każdy może spróbować i zobaczyć gdzie jest aktualnie. Powodzenia :)

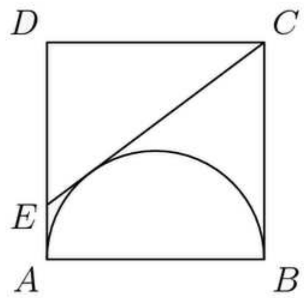
Zadanie 1. Okrąg ω_B jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_A w punkcie X, zaś okrąg ω_C jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_A w punkcie Y. Okręgi ω_B oraz ω_C są styczne zewnętrznie. Niech A, B, C będą odpowiednio środkami okręgów $\omega_A, \omega_B, \omega_C$. Jeśli wiadomo, że $AB = 6, AC = 5$ oraz $BC = 9$, to ile wynosi długość AX?



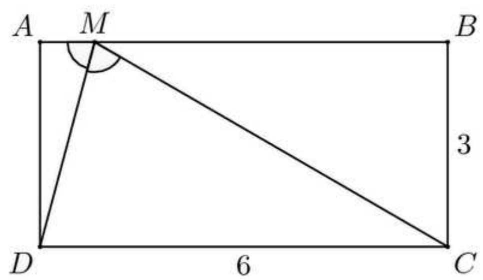
Zadanie 2. [AHSME] W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC przy czym $AC = CD$ oraz $\measuredangle CAB - \measuredangle ABC = 30°$. Jaka jest miara kąta $\measuredangle BAD$?



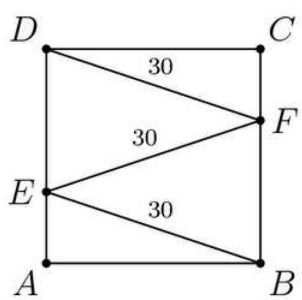
Zadanie 3. [AMC 10A, 2004] Kwadrat $ABCD$ ma długość boku równą 2. Rozważmy okrąg o średnicy AB oraz styczną do tego okręgu poprowadzoną z punktu C, różną od prostej zawierającej bok BC. Załóżmy, że styczna ta przecina bok AD w punkcie E. Znajdź długość odcinka CE.



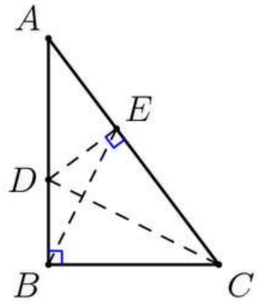
Zadanie 4. [AMC 10 B, 2011] Boki AB oraz BC prostokąta $ABCD$ mają długości równe odpowiednio: 6 oraz 3. Na boku AB wybieramy punkt M taki, że $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$. Jaka jest miara kąta $\measuredangle AMD$?



Zadanie 5. [AIME 2011] Na bokach AD oraz BC kwadratu $ABCD$ obieramy odpowiednio punkty E oraz F, przy czym $BE = BF = FD = 30$. Znajdź pole tego kwadratu.

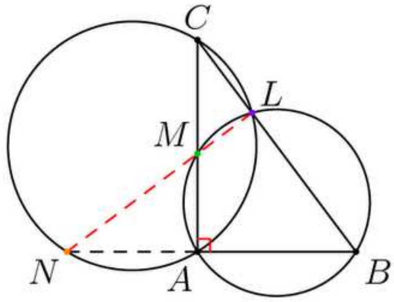


Zadanie 6. Punkty A, B oraz C położone są na płaszczyźnie tak, że $\measuredangle ABC = 90°$. Niech D będzie dowolnym punktem na odcinku AB oraz niech E będzie rzutem punktu D na prostą AC. Udowodnij, że $\measuredangle DBE = \measuredangle DCE$.

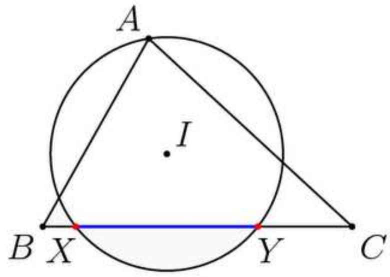


Zadanie 7. [AMC 10B, 2012] Na płaszczyźnie położone są cztery punkty i to w taki sposób, że odcinki łączące je ze sobą mają długości $a, a, a, a, 2a$ oraz b, dla pewnych $a, b > 0$. Znajdź stosunek b/a.

Zadanie 8. [Wielka Brytania 2010] Niech ABC będzie trójkątem takim, że kąt CAB jest prosty. Niech L będzie punktem leżącym na boku BC. Okrąg opisany na trójkącie BAL przecina prostą AC w punkcie M oraz okrąg opisany na trójkącie CAL przecina prostą AB w punkcie N. Udowodnij, że punkty L, M, N są współliniowe.



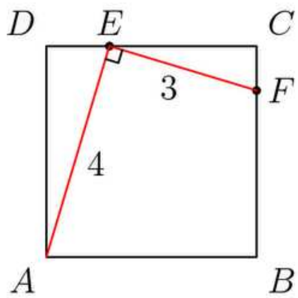
Zadanie 9. [OMO 2014] Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Niech $AB = 1400$, $AC = 1800$ oraz $BC = 2014$. Okrąg o środku w I i przechodzący przez A przecina prostą BC w punktach X oraz Y. Oblicz długość odcinka XY.



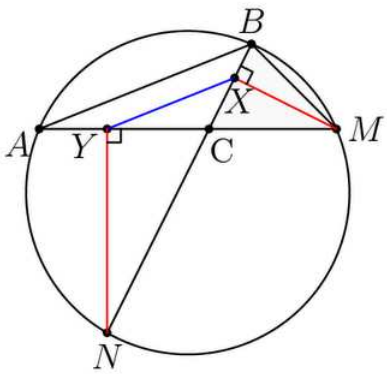
Zadanie 10. [Indie 2014] Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym, gdzie $AB = AC$ oraz niech Γ będzie okręgiem opisanym na tym trójkącie. Wybieramy punkt D na łuku AB nie zawierającym punktu C oraz punkt E na łuku AC nie zawierającym punktu B. Załóżmy, że $AD = CE$. Wykaż, że $BE || AD$.

Zadanie 11. Wielokąt nazwiemy równorakim jeśli wartości liczbowe pola oraz obwodu tego wielokąta są równe. Na przykład kwadrat o boku równym 4 jest równoraki. Pokaż, że dowolny wielokąt można przekształcić przez jednokładność w wielokąt równoraki.

Zadanie 12. [David Altizio] Trójkąt AEF jest prostokątny, przy czym $AE = 4$ oraz $EF = 3$. Trójkąt ten wpisany jest w kwadrat $ABCD$ tak, jak na rysunku poniżej. Jakie jest pole tego kwadratu?



Zadanie 13. Punkty A oraz B położone są na okręgu Γ, zaś punkt C leży wewnątrz Γ. Niech $M \neq A$ oraz $N \neq B$ będą punktami przecięcia okręgu Γ i prostych, odpowiednio: AC oraz BC. Niech X będzie rzutem M na prostą BN oraz niech Y będzie rzutem N na prostą AM. Udowodnij, że $AB || XY$.



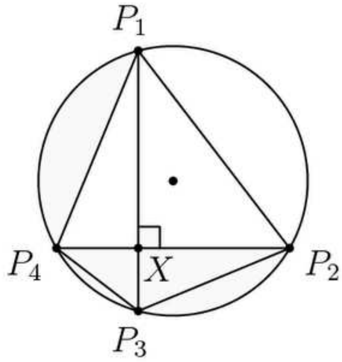
Zadanie 14. [AIME 2007] Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 13. Punkty E oraz F leżą na zewnątrz tego kwadratu tak, że $BE = DF = 5$ oraz $AE = CF = 12$. Znajdź EF^2.

Zadanie 15. Niech Γ będzie okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ oraz niech D, E, F będą środkami (krótszych z) łuków AB, BC, CA. Udowodnij, że $DF \perp AE$.

Zadanie 16. [AIME 1984] W czworościanie $ABCD$ krawędź AB ma długość 3 cm. Pole ściany ABC to $15cm^2$ zaś pole ściany ABD to $12cm^2$. Ściany ABC oraz ABD przecinają się pod kątem $30°$. Znajdź objętość tego czworościanu w cm^3.

Zadanie 17. Niech $P_1P_2P_3P_4$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg o średnicy d, oraz niech X będzie punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Załóżmy, że $P_1P_3 \perp P_2P_4$. Wykaż, że

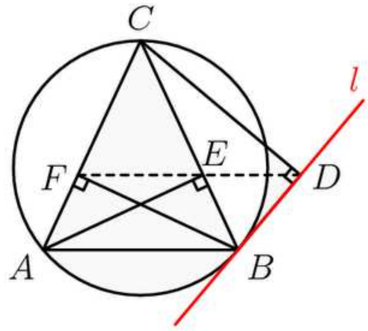
$$d^2 = XP_1^2 + XP_2^2 + XP_3^2 + XP_4^2.$$



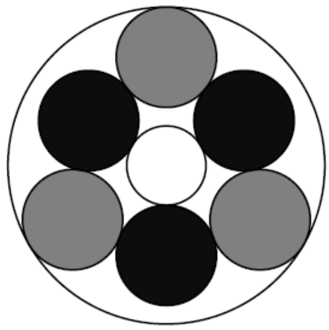
Zadanie 18. [iTest 2008] Przekroje sfery Γ dwiema prostopadłymi płaszczyznami wyznaczają na Γ dwa okręgi. Okręgi te przecinają się dwóch punktach A i B takich, że $AB = 42$. Wiedząc, że promienie tych okręgów wynoszą 54 i 66 znajdź promień R sfery Γ.

Zadanie 19. [AIME 2008] W trapezie $ABCD$ with $BC||AD$ mamy $BC = 1000$ oraz $AD = 2008$. Niech $\measuredangle A = 37°$, $\measuredangle D = 53°$ oraz niech M i N będą środkami odcinków BC oraz AD. Znajdź długość MN.

Zadanie 20. [Sharygin 2014] Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie AB. Prosta l jest styczna do okręgu opisanego na ABC w punkcie B. Niech D będzie rzutem punktu C na prostą l oraz niech E, F będą rzutami punktów A oraz B odpowiednio na boki BC oraz AC trójkąta ABC. Wykaż, że punkty D, E, F są współliniowe.

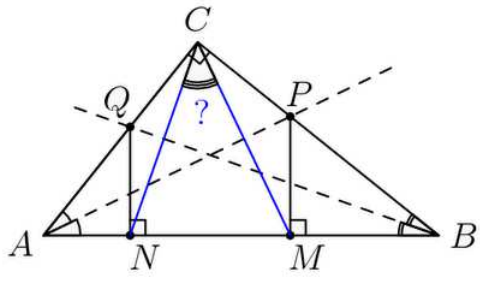


Zadanie 21. [Purple Comet 2013] Dwa współśrodkowe okręgi mają promienie 1 oraz 4. Sześć przystających okręgów tworzy pierścień, gdzie każdy z sześciu okręgów jest styczny do dwóch obok, jak na rysunku obok. Trzy jasno zacienione okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu 4, podczas gdy trzy ciemniej zacienione okręgi są styczne zewnętrznie do okręgu o promieniu 1. Znajdź promień każdego z sześciu przystających okręgów.

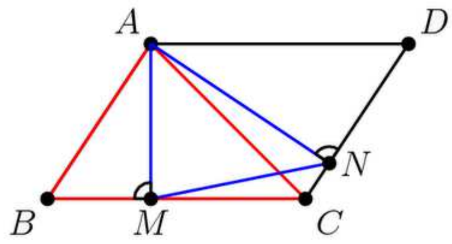


Zadanie 22. Niech A, B, C oraz D będą punktami na płaszczyźnie takimi, że $\measuredangle BAC = \measuredangle CBD$. Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie ABC jest styczny do BD.

Zadanie 23. [Wielka Brytania 1995] Rozważmy trójkąt prostokątny ABC, gdzie kąt prosty znajduje się przy wierzchołku C. Dwusieczne kątów BAC oraz ABC przecinają boki BC oraz CA odpowiednio w punktach P oraz Q. Punkty M oraz N są rzutami prostokątnymi punktów P oraz Q na bok AB. Znajdź kąt MCN.



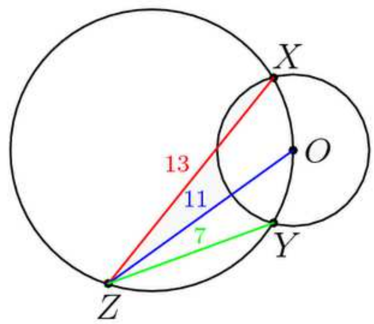
Zadanie 24. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, w którym kąt przy wierzchołku A jest rozwarty, oraz niech M i N będą rzutami punktu A na proste BC oraz CD. Wykaż, że $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.



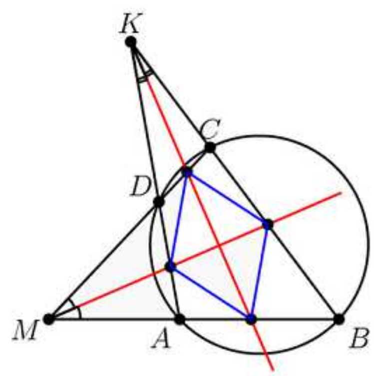
Zadanie 25. Dla ustalonego trójkąta $\triangle ABC$ niech H będzie ortocentrum, zaś O – środkiem okręgu opisanego. Udowodnij, że $\measuredangle HAB = \measuredangle OAC$ oraz $\measuredangle HAO = |\measuredangle B - \measuredangle C|$.

Zadanie 26. Załóżmy, że P, A, B, C oraz D są punktami na płaszczyźnie takimi, że $\triangle PAB \sim \triangle PCD$. Udowodnij, że $\triangle PAC \sim PBD$.

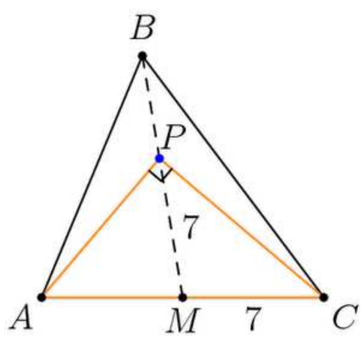
Zadanie 27. [AMC 12A 2012] Okrąg C_1 ma środek O, który leży na okręgu C_2. Okręgi C_1 i C_2 przecinają się w punktach X oraz Y. Punkt Z znajduje się na zewnątrz C_1, ale jednocześnie należy do C_2. Niech $XZ = 13, OZ = 11$ oraz $YZ = 7$. Jaka jest miara promienia okręgu C_1?



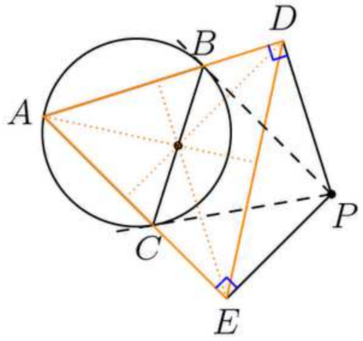
Zadanie 28. Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym, w którym żadna para boków nie jest równoległa. Proste AD oraz BC przecinają się w K, zaś proste AB i CD przecinają się w M. Dwusieczna kąta DKC przecina CD oraz AB w punktach E oraz F. Natomiast dwusieczna kąta CMB przecina BC oraz AD w punktach G oraz H. Udowodnij, że czworokąt $EGHF$ jest rombem.



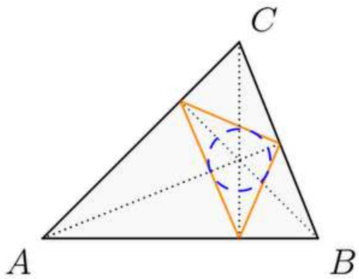
Zadanie 29. [David Altizio] W trójkącie ABC mamy $AB = 13, AC = 14$ oraz $BC = 15$. Niech M będzie środkiem boku AC. Punkt P leży na odcinku BM tak, że $AP \perp PC$. Znajdź pole trójkąta $\triangle APC$.



Zadanie 30. [Rosja 2013] Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg Ω. Proste styczne do Ω w B oraz C przecinają się w P. Punkty D oraz E leżą na AB oraz AC tak, że PD oraz PE są prostopadłe odpowiednio do AB oraz AC. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta ADE jest środkiem boku BC.

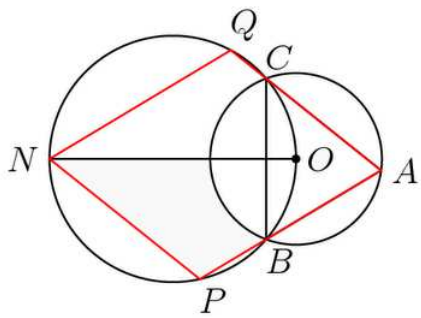


Zadanie 31. W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym ortocentrum to punkt H, niech H_A będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Analogicznie definiujemy H_B oraz H_C. Pokaż, że H jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle H_A H_B H_C$.

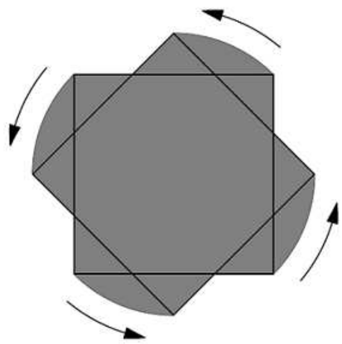


Zadanie 32. W trójkącie ABC mamy $AB = 86$ oraz $AC = 97$. Okrąg o środku A oraz promieniu AB przecina BC w punktach B oraz X. Wiadomo ponadto, że długości boków BX oraz CX wyrażają się liczbami całkowitymi. Znajdź długość BC.

Zadanie 33. [AOPM 2010] Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle BAC \neq 90°$. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech Γ będzie okręgiem opisanym na trójkącie BOC. Załóżmy, że Γ przecina prostą AB w punkcie P (różnym od B) oraz, że przecina prostą AC w punkcie Q (różnym od C). Niech ON będzie średnicą okręgu Γ. Udowodnij, że $APNQ$ jest równoległobokiem.

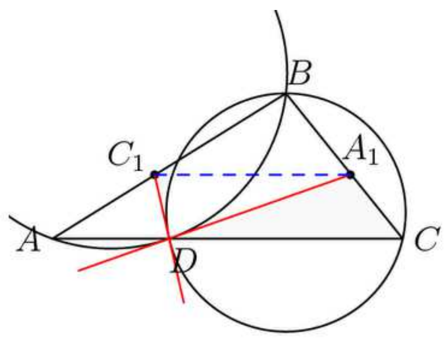


Zadanie 34. [AMC 10A 2013] Kwadrat o boku 1 obrócono o 45° wokół środka. Oblicz pole obszaru zakreślonego przez wnętrze tego kwadratu.

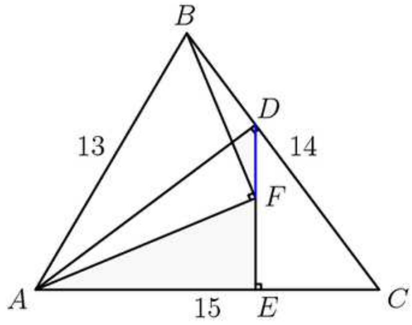


Zadanie 35. [Kanada 1986] Cięciwa ST przemieszcza się po półokręgu o średnicy AB. Niech M będzie środkiem ST oraz niech P będzie rzutem S na AB. Udowodnij, ze kąt SPM jest stały niezależnie od pozycji ST.

Zadanie 36. [Sharygin 2012] Na boku AC trójkąta ABC obieramy punkt D. Styczna w punkcie D do okręgu opisanego na trójkącie BDC przecina AB w C_1. Analogicznie, na boku BC określony jest punkt A_1. Udowodnij, że $A_1C_1 || AC$.

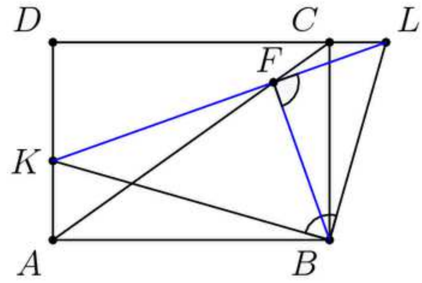


Zadanie 37. [AMC 10B 2013] W trójkącie ABC mamy $AB = 13, BC = 14$ oraz $CA = 15$. Punkty D, E oraz F leżą na bokach BC, CA oraz DE tak, że $AD \perp BC$, $DE \perp AC$ oraz $AF \perp BF$. Znajdź długość odcinka DF.

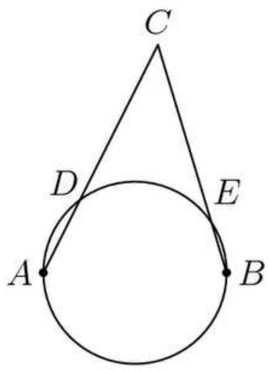


Zadanie 38. [Mandelbrot] W trójkącie ABC mamy $AB = 5, AC = 6$ oraz $BC = 7$. Wybieramy punkt X na odcinku BC, że suma pól okręgów opisanych na trójkątach AXB oraz AXC jest minimalna. Wyznacz długość BX.

Zadanie 39. [Sharygin 2014] Dany jest prostokąt $ABCD$. Dwie prostopadłe proste przechodzą przez punkt B. Jedna z nich przecina prostą AD w punkcie K, a druga przecina przedłużenie boku CD w punkcie L. Niech F będzie przecięciem KL oraz AC. Wykaż, że $BF \perp KL$.

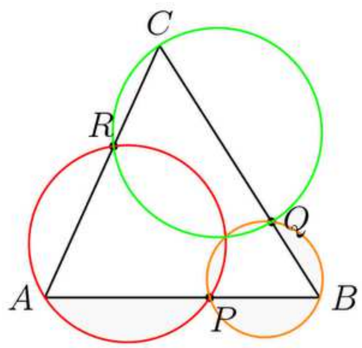


Zadanie 40. [AIME, niewykorzystane] Na rysunku obok odcinek AB jest średnicą okręgu o promieniu 15. Jeśli $AD = AC/3$ oraz $BE = BC/4$, to ile wynosi pole trójkąta ABC?

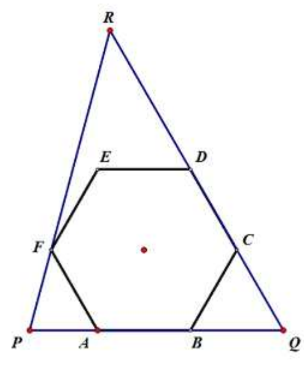


Zadanie 41. [MOSP 1995] Wewnątrz prostokąta $ABCD$ obieramy punkt P taki, że $\measuredangle APD + \measuredangle BPC = 180°$. Znajdź sumę $\measuredangle DAP + \measuredangle BAP$.

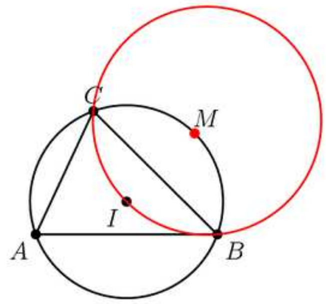
Zadanie 42. Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC obieramy odpowiednio punkty P, Q, R. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach AQR, BRP oraz CPQ przecinają się w jednym punkcie (zauważ, że punkty te mogą być obrane także na przedłużeniach prostych zawierających boki).



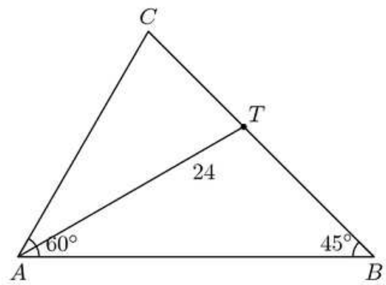
Zadanie 43. [AIME 2013] Dany jest trójkąt PQR przy czym $\measuredangle P = 75°$ oraz $\measuredangle Q = 60°$. Wewnątrz tego trójkąta umieszczony jest sześciokąt foremny o boku długości 1 w taki sposób, że bok AB leży na PQ, bok CD leży na QR oraz jeden z pozostałych wierzchołków leży na RP. Znajdź pole trójkąta PQR.



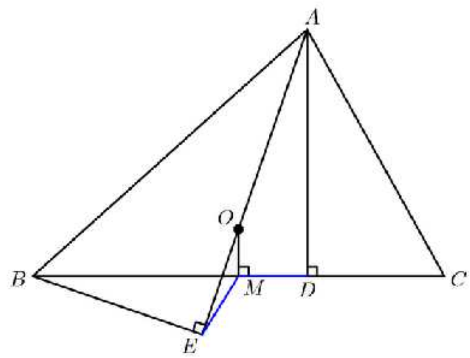
Zadanie 44. Niech Γ będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ oraz niech M będzie środkiem krótszego łuku BC na Γ. Udowodnij, że M jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle BIC$.



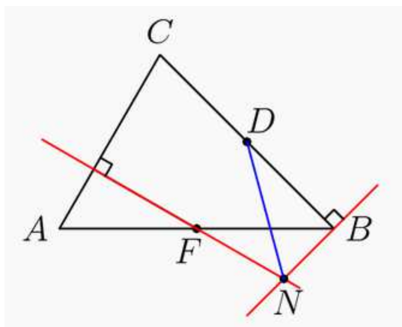
Zadanie 45. [AIME 2001] W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A oraz B mają miary równe odpowiednio $60°$ oraz $45°$. Dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina BC w punkcie T, przy czym $AT = 24$. Znajdź pole trójkąta ABC.



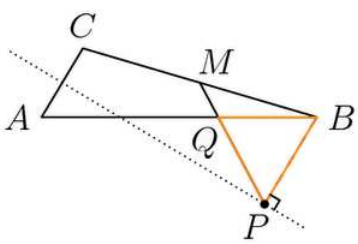
Zadanie 46. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, przy czym $AB > AC$. Niech M będzie środkiem BC, D – spodkiem wysokości trójkąta ABC z wierzchołka A na bok BC, zaś E – punktem na prostej AO takim, że $BE \perp AO$. Wykaż, że $MD = ME$.



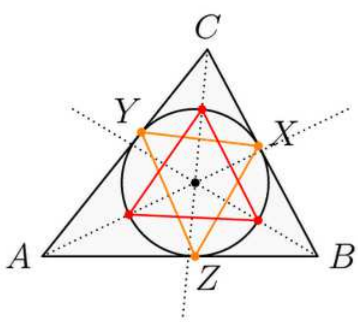
Zadanie 47. [Indie RMO 2008] Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech D, F będą środkami boków BC oraz AB. Prosta prostopadła do AC przechodząca przez F oraz prosta prostopadła do BC przechodzaca przez B przecinają się w punkcie N. Wykaż, że długość odcinka ND równa jest długości promienia okręgu opisanego na $\triangle ABC$.



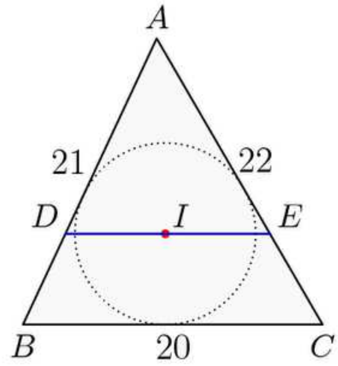
Zadanie 48. [Sharygin 2012] Niech ABC będzie trójkątem oraz niech M będzie środkiem boku BC. Punkt P jest rzutem punktu B na symetralną boku AC. Niech Q będzie punktem przecięcia prostych PM oraz AB. Udowodnij, że trójkąt QPB jest równoramienny.



Zadanie 49. [ELMO SL 2013] Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Niech U, V, W będą punktami przecięcia dwusiecznych kątów BAC, ABC oraz BCA z okręgiem wpisanym w $\triangle ABC$ tak, że V leży pomiędzy B oraz I, podobnie U i V. Niech X, Y, Z będą punktami styczności okręgu wpisanego w ABC z BC, AC oraz AB. Wykaż, że trójkąty UVW oraz XYZ są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy ABC jest równoboczny.

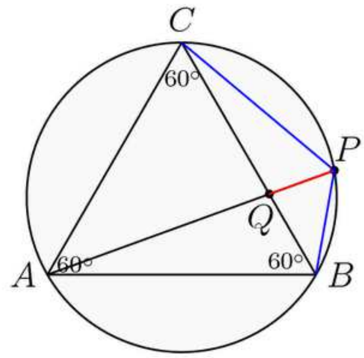


Zadanie 50. [AIME 2001] Trójkąt ABC ma boki długości $AB = 21$, $AC = 22$, $BC = 20$. Punkty D oraz E leżą na bokach AB oraz AC tak, że DE jest równoległy do BC oraz DE zawiera środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Znajdź długość DE.

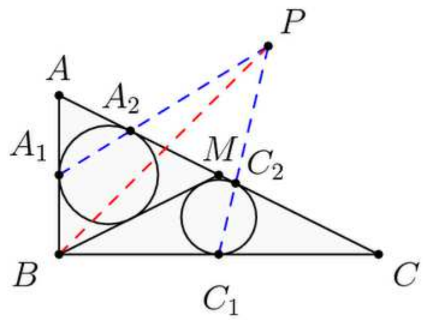


Zadanie 51. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Wybieramy punkt P na krótszym łuku BC. Niech Q będzie punktem przecięcia AP oraz BC. Wykaż, że

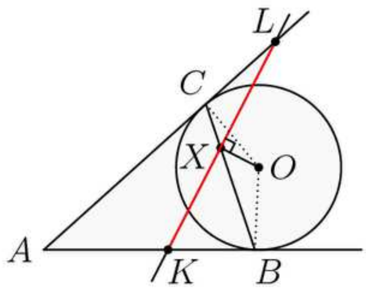
$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}.$$



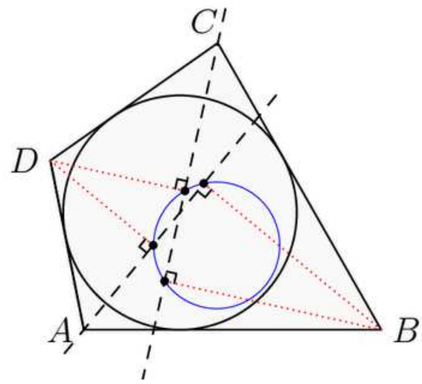
Zadanie 52. [Sharygin 2012] Niech BM będzie środkową trójkąta prostokątnego ABC (przy czym $\measuredangle B = 90°$). Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boków AB oraz AM w punktach A_1 oraz A_2. Analogicznie definiujemy punkty C_1, C_2. Wykaż, że proste A_1A_2 oraz C_1C_2, a także dwusieczna kąta ABC przecinają się w jednym punkcie.



Zadanie 53. [IMSA] Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie O. Prosta AB oraz AC są styczne do ω w punktach B oraz C. Na odcinku BC wybieramy punkt X, oraz przez l oznaczamy prostą przechodzacą przez X i prostopadłą do XO. Niech l przecina proste AB oraz AC w punktach K oraz L. Wykaż, że X jest środkiem odcinka KL.

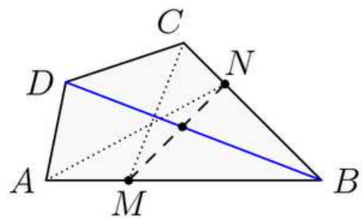


Zadanie 54. [Sharygin 2008] Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku I. Udowodnij, że rzuty punktów B oraz D na proste IA oraz IC leżą na jednym okręgu.

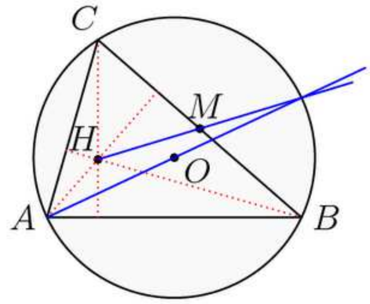


Zadanie 55. [HMMT] Niech $ABCD$ będzie trapezem równoramiennym takim, że $AB = 10$, $BC = 15$, $CD = 28$ oraz $DA = 15$. Weźmy punkt E taki, ze $\triangle AED$ oraz $\triangle AEB$ mają równe pola. Jaka jest minimalna możliwa długość odcinka EC?

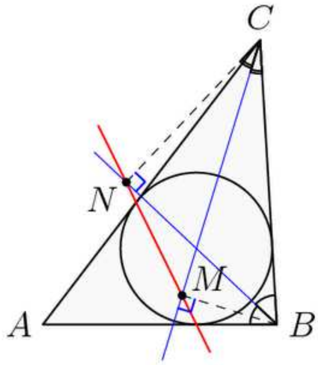
Zadanie 56. [Kanada 2008] Weźmy czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że AB jest najdłuższym z jego boków. Punkty M oraz N leżą na bokach AB oraz BC, przy czym każdy z odcinków AN oraz CM dzieli czworokąt $ABCD$ na dwie części o równych polach. Udowodnij, że MN dzieli przekątną BD na dwie równe części.



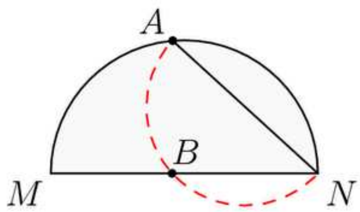
Zadanie 57. [Indie RMO 2011] Niech ABC będzie trójkątem, w którym wszystkie boki mają różne długości. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC, zaś H – ortocentrum tego trójkąta. Wykaż, że jeśli M jest środkiem BC, to AO oraz HM przecinają się na okręgu opisanym na $\triangle ABC$.



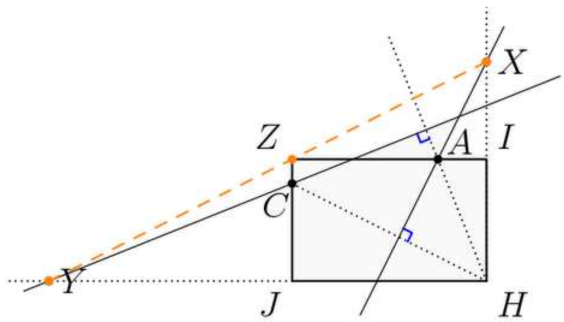
Zadanie 58. [Sharygin 2009] Niech ABC będzie trójkątem. Punkty M oraz N są rzutami punktów B oraz C na dwusieczne kątów przy wierzchołkach C oraz B. Wykaż, że prosta MN przecina boki AC oraz AB w punktach styczności tychże boków z okręgiem wpisanym w trójkąt ABC.



Zadanie 59. [PUMaC 2010] Na półokręgu o średnicy MN położona jest cięciwa AN. Półokrąg o średnicy AN przecina MN w punkcie B. Załóżmy, że $MB/BN = 2/3$ oraz, że $MN = 10$. Znajdź AN^2.

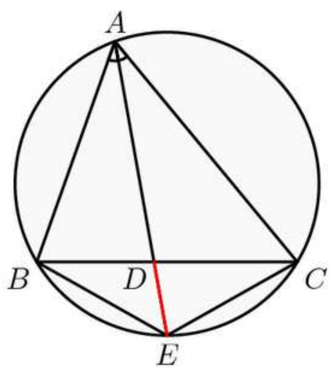


Zadanie 60. [BAMO 2001] Niech $JHIZ$ będzie prostokątem oraz niech A oraz C będą punktami na bokach ZI oraz ZJ. Z punktu A poprowadzono prostą prostopadłą do CH. Przecina ona prostą HI w punkcie X. Z punktu C poprowadzono prostą prostopadłą do AH. Przecina ona prostą HJ w Y. Udowodnij, że X, Y, Z są współliniowe.

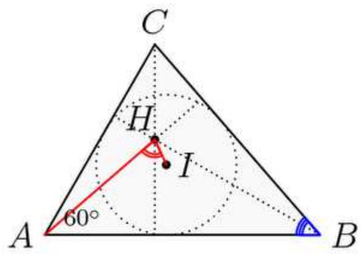


Zadanie 61. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC. Niech O_1 oraz O_2 będą środkami okręgów opisanych na $\triangle ABD$ oraz $\triangle ACD$. Wykaż, że $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$.

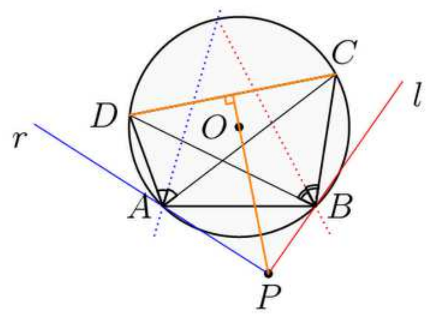
Zadanie 62. [Ray LI] W trójkącie ABC mamy $AB = 36$, $BC = 40$ oraz $CA = 44$. Dwusieczna kąta A przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na ABC w punkcie E (różnym od A). Znajdź wartość DE^2.



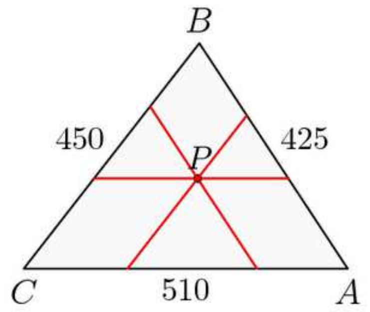
Zadanie 63. [APMO 2007] Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, przy czym $\measuredangle BAC = 60°$ oraz $AB > AC$. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ oraz niech H będzie ortocentrum tego trójkąta. Wykaż, że $2\measuredangle AHI = 3\measuredangle ABC$.



Zadanie 64. [Brazylia 2008] Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym. Proste r oraz s powstają przez odbicie symetryczne AB względem dwusiecznych kątów CAD oraz CBD. Niech P będzie punktem przecięcia prostych r oraz s, zaś niech O będzie środkiem okręgu opisanego na $ABCD$. Udowodnij, że $OP \perp CD$.



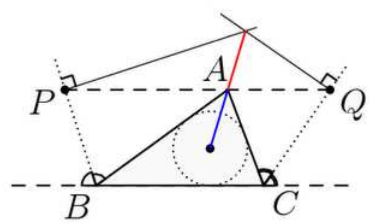
Zadanie 65. [AIME 1986] W trójkącie ABC mamy $AB = 425$, $BC = 450$ oraz $CA = 510$. Wewnątrz tego trójkata obieramy punkt P i prowadzimy przezeń proste równoległe do boków trójkąta. Załóżmy, że fragmenty tych prostych zawarte w trójkącie ABC mają równą długośc d. Znajdź tę wartość.



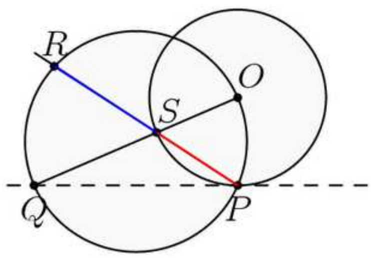
Zadanie 66. Niech P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 oraz P_6 będą środkami odcinków AB, BC, CD, DA, AC oraz BD czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że proste P_1P_3, P_2P_4 oraz P_5P_6 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 67. [PUMaC 2013] Dany jest trójkąt równoboczny. Znajdź długość boku tego trójkąta wiedząc, że na okręgu wpisanym w ten trójkąt istnieje punkt, którego dwie najmniejsze odległości do boków trójkąta wynosza 1 oraz 4.

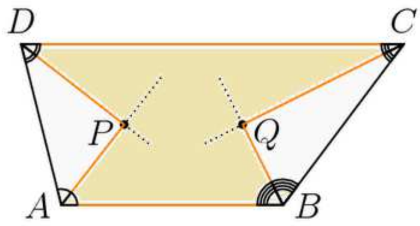
Zadanie 68. [IberoAmerican 2012] Niech ABC będzie trójkątem. Punkty P oraz Q powstają przez przecięcie prostej równoległej do BC przechodzącej przez A oraz zewnętrznych dwusiecznych kątów przy wierzchołkach B oraz C. Prosta prostopadła do BP w punkcie P oraz prosta prostopadła do CQ w punkcie Q spotykają się w R. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w ABC. Pokaż, że $AI = AR$.

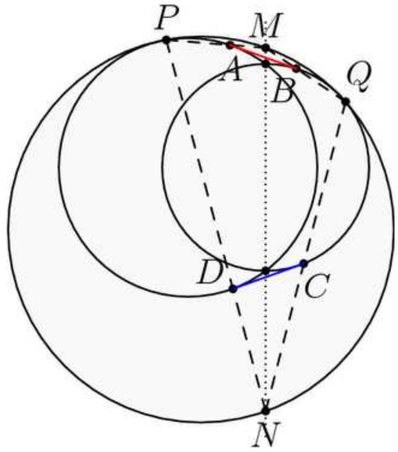


Zadanie 69. [Meksyk 2012] Niech C_1 będzie okręgiem o środku O i punkcie P leżącym na C_1. Prosta l jest styczna do C_1 w P. Rozważmy punkt Q na l, różny od P i niech C_2 będzie okręgiem opisanym na trójkącie OPQ. Prosta OQ przecina C_1 w punkcie S zaś prosta PS przecina C_2 w punkcie R (różnym od P). Wykaż, że jeśli r_1 oraz r_2 są promieniami C_1 oraz C_2, to $PS/SR = r_1/r_2$.



Zadanie 70. [AMC 12B 2008] Niech $ABCD$ będzie trapezem, gdzie $AB||CD$ oraz $AB = 11$, $BC = 5$, $CD = 19$ oraz $DA = 7$. Dwusieczne kątów przy wierzchołkach A oraz D tego trapezu przecinają się w punkcie P, zaś dwusieczne kątów przy wierzchołkach B oraz C przecinają się w Q. Wyznacz pole sześciokąta $ABQCDP$.

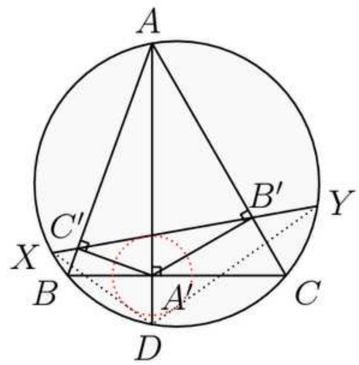


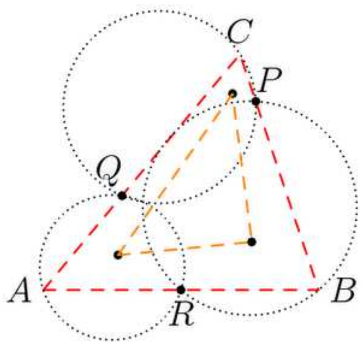


Zadanie 71. [Sharygin 2008] Załóżmy, że X, Y są punktami wspólnymi okręgów ω_1 oraz ω_2. Okrąg ω jest styczny wewnętrznie do okręgów ω_1 oraz ω_2 w punktach odpowiednio P oraz Q. Prosta XY przecina ω w punktach M oraz N. Proste PM oraz PN przecinają ω_1 w punktach A oraz D, zaś proste QM oraz QN przecinają ω_2 w punktach B oraz C. Wykaż, że $AB = CD$.

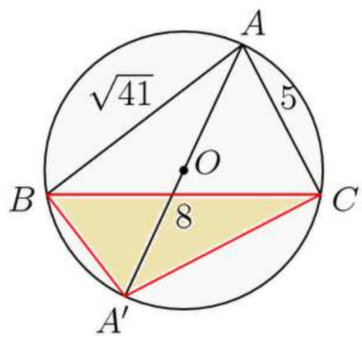
Zadanie 72. [Włochy TST] Przekątne AC oraz BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie M. Dwusieczna kąta $\measuredangle ACD$ przecina prostą BA w punkcie K. Wiedząc, że $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$ wykaż, że $\measuredangle BKC = \measuredangle CDB$.

Zadanie 73. [Sharygin 2012] W trójkącie ostrokątnym ABC wpisanym w okrąg ω, niech A' będzie rzutem A na prostą BC, zaś B', C' – rzutami A' odpowiednio na proste AC oraz AB. Prosta $B'C'$ przecina ω w punktach X, Y oraz prosta AA' przecina ω drugi raz w punkcie D. Udowodnij, że A' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYD.



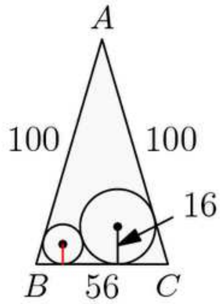


Zadanie 74. Niech P, Q, R będą dowolnymi punktami na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Udowodnij, że środki okręgów opisanych na trójkątach AQR, BRP, CPQ tworzą trójkąt podobny do trójkąta ABC.



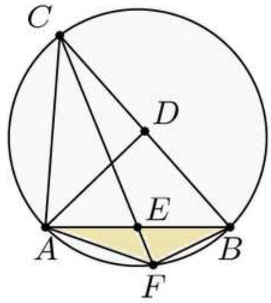
Zadanie 75. [Mandelbrot 2008] Długości boków trójkąta ABC wynoszą odpowiednio: $AB = \sqrt{41}$, $AC = 5$ oraz $BC = 8$. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem punktu O. Wyznacz pole trójkąta $A'BC$.

Zadanie 76. [AIME 2008] W trójkącie ABC mamy $AB = AC = 100$ oraz $BC = 56$. Okrąg P ma promień 16 i jest styczny do prostych AC oraz BC. Okrąg Q styczny zewnętrznie do P jest styczny także do AB oraz BC. Żaden punkt okręgu Q nie leży na zewnątrz trójkąta ABC. Wyznacz promień okręgu Q.

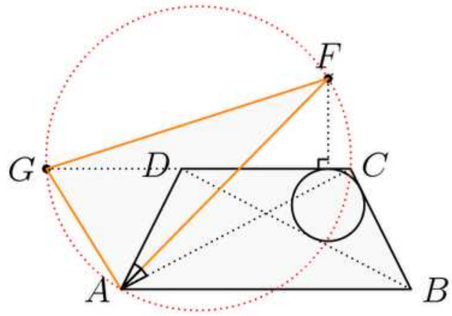


Zadanie 77. Na płaszczyźnie dane są punkty P, A, B, C oraz D, przy czym $\triangle PAB \sim \triangle PCD$. Niech M oraz N będą środkami odcinków AC oraz BD. Pokaż, że $\triangle PAB \sim \triangle PMN \sim \triangle PCD$.

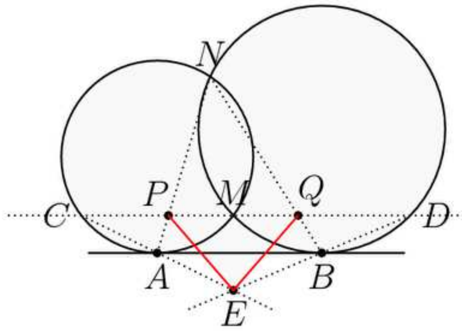
Zadanie 78. [AIME 2002] W trójkącie ABC środkowe AD oraz CE mają długości odpowiednio 18 oraz 27. Wiadomo też, że $AB = 24$. Prosta CE przecina okrąg opisany na ABC w punkcie F (różnym od C). Wyznacz pole trójkąta AFB.



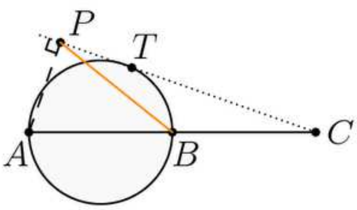
Zadanie 79. [USAMO 1999] Niech $ABCD$ będzie trapezem równoramiennym przy czym $AB||CD$. Okrąg ω wpisany w trójkąt BCD jest styczny do CD w punkcie E. Niech F będzie punktem na dwusiecznej kąta DAC takim, że $EF \perp CD$. Okrąg opisany na trójkącie ACF przecina prostą CD w punktach C oraz G. Wykaż, że trójkąt AFG jest równoramienny.



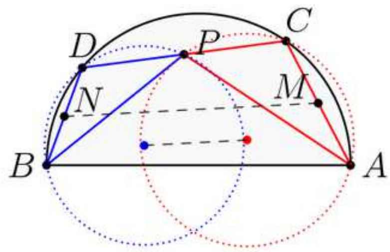
Zadanie 80. [IMO 2000] Okręgi G_1 oraz G_2 przecinają się w punktach M oraz N. Weźmy wspólną styczną tych okręgów w punktach A oraz B tak, że M leży bliżej AB niż N. Niech CD będzie prostą równoległą do AB przechodzącą przez M, przy czym C leży na G_1 oraz D leży na G_2. Proste AC oraz BD przecinają się w punkcie E, proste AN oraz CD przecinają się w punkcie P, zaś proste BN i CD przecinają się w punkcie Q. Pokaż, że $EP = EQ$.



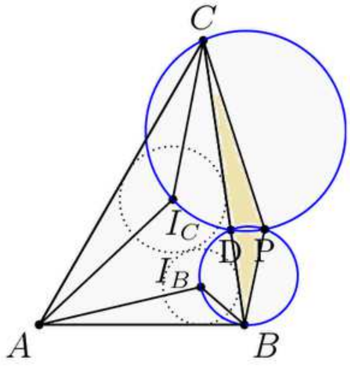
Zadanie 81. [AIME 2008] Niech AB będzie średnicą okręgu ω. Przedłużamy ten odcinek przez punkt B do punktu C. Punkt T leży na ω tak, że CT jest styczna do ω. Punkt P jest rzutem punktu A na prostą CT. Niech $AB = 18$. Jaka jest największa możliwa długość odcinka BP?



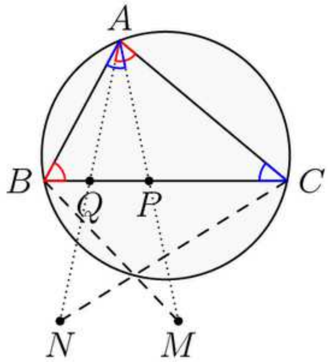
Zadanie 82. [IberoAmerican 2003] Niech C oraz D będą dwoma punktami na półokręgu o średnicy AB takimi, że B oraz C są po różnych stronach prostej AD. Przez M, N oraz P oznaczamy środki odcinków AC, BD oraz CD. Niech O_A oraz O_B będą środkami okręgów opisanych na trójkątach ACP oraz BDP. Pokaż, że proste O_AO_B oraz MN są równoległe.



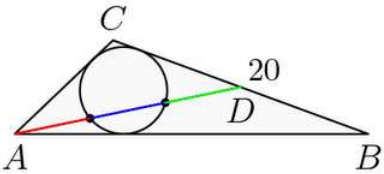
Zadanie 83. [AIME 2009] W trójkącie ABC mamy $AB = 10, BC = 14, CA = 16$. Niech D będzie punktem wewnątrz odcinka BC. Niech I_B oraz I_C będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD oraz ACD. Okręgi opisane na trójkątach BI_BD oraz CI_CD przecinają się w dwóch (różnych) punktach P oraz D. Znajdź maksymalną możliwą wartość pola trójkąta BPC.



Zadanie 84. [IMO 2014] Niech P, Q leżą na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC tak, że $\angle PAB = \angle BCA$ oraz $\angle CAQ = \angle ABC$. Niech M oraz N będą punktami na AP oraz AQ takimi, że P jest środkiem AM oraz Q jest środkiem AN. Wykaż, że punkt przecięcia prostych BM oraz CN leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

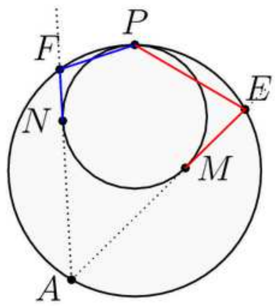


Zadanie 85. [AIME 2005] Bok BC trójkąta ABC ma długość 20. Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli środkową AD tego trójkąta na trzy równe części. Wyznacz pole trójkąta ABC.

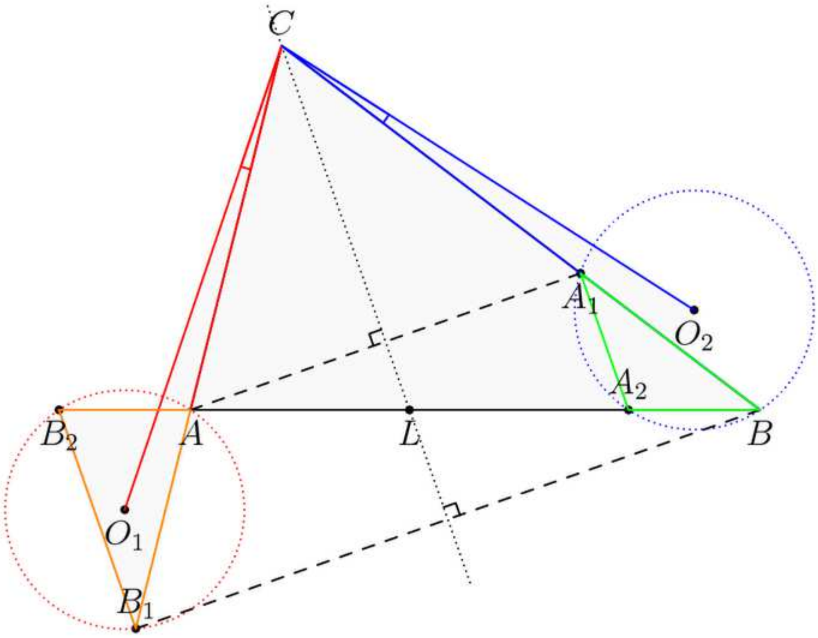


Zadanie 86. [Twierdzenie Japońskie] Niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą punktami (w tej kolejności) na okręgu ω. Dla liczb całkowitych $1 \leqslant k \leqslant 4$ niech I_k będzie środkiem okręgu wpisanego w $\triangle A_k A_{k+1} A_{k+2}$, gdzie indeksy są brane modulo 4 (na przykład $A_5 = A_1$). Pokaż, że $I_1 I_2 I_3 I_4$ jest prostokątem.

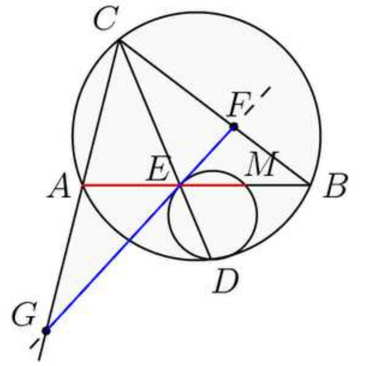
Zadanie 87. [Iran 2007] Okręgi C oraz D są styczne wewnętrznie do siebie w punkcie P. Obieramy punkt A na okręgu C. Prowadzimy styczne AM oraz AN z punktu A do okręgu D (M, N są punktami styczności). Drugie punkty przecięć prostych AM oraz AN z okręgiem C to E oraz F. Udowodnij, że $PE/PF = ME/NF$.



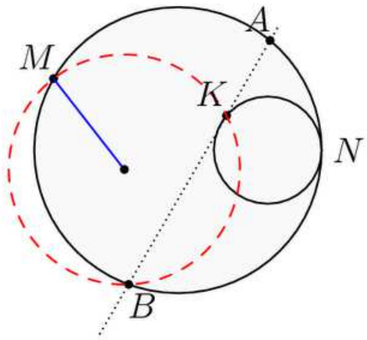
Zadanie 88. [Sharygin 2009] Niech CL będzie dwusieczną w trójkącie ABC, gdzie L należy do BC. Punkty A_1 oraz B_1 są odbiciami punktów A oraz B względem CL, zaś punkty A_2, B_2 są odbiciami A oraz B względem punktu L. Niech O_1 oraz O_2 będą środkami okręgów opisanych na trójkątach AB_1B_2 oraz BA_1A_2. Udowodnij, że $\measuredangle O_1CA = \measuredangle O_2CB$.



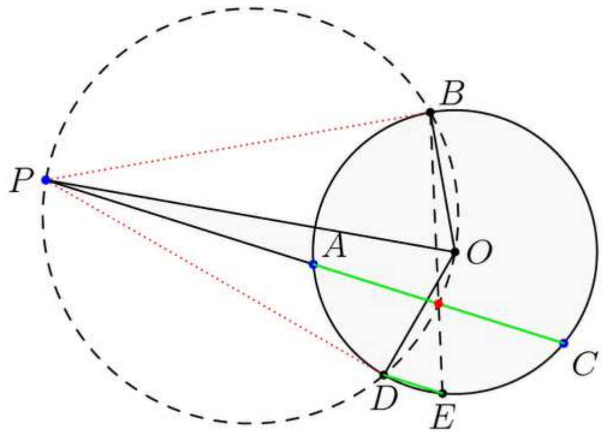
Zadanie 89. [IMO 1990] Cięciwy AB oraz CD okręgu przecinają się w punkcie E leżącym wewnątrz tego okręgu. Niech M będzie punktem wewnątrz odcinka EB. W punkcie E prowadzimy styczną do okręgu opisanego na trójkącie DEM. Przecina ona proste BC oraz AC w punktach F oraz G. Jeśli $AM/MB = t$, wyznacz EG/EF.



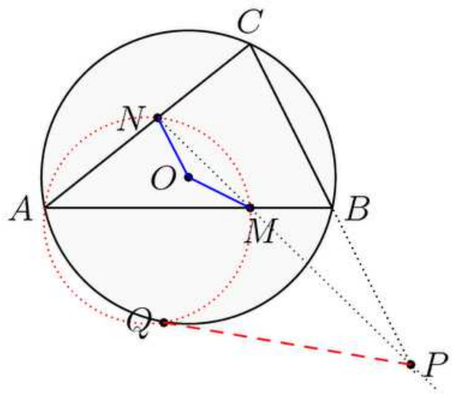
Zadanie 90. [All-Russian MO 2001] Niech okrąg ω_1 będzie styczny wewnętrznie w punkcie N do innego okręgu: ω_2. Na ω_1 obieramy punkt K i prowadzimy prostą AB, która przecina ω_2 w punktach A oraz B. Niech M będzie środkiem łuku AB okręgu ω_2, który nie zawiera punktu N. Udowodnij, że promień okręgu opisanego na $\triangle KBM$ nie zależy od wyboru punktu K.



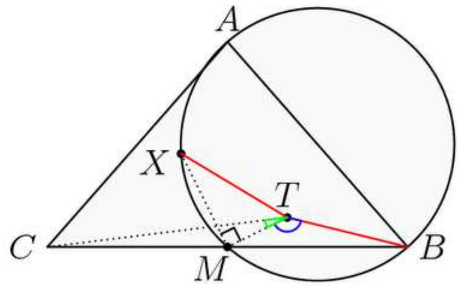
Zadanie 91. [USAJMO 2011] Punkty A, B, C, D, E leżą na okręgu ω, zaś punkt P leży na zewnątrz tego okręgu. Podane punkty mają następujące własności: (i) proste PB oraz PD są styczne do ω, (ii) punkty P, A, C są współliniowe oraz (iii): $DE||AC$. Wykaż, że BE przecina odcinek AC dokładnie w połowie.



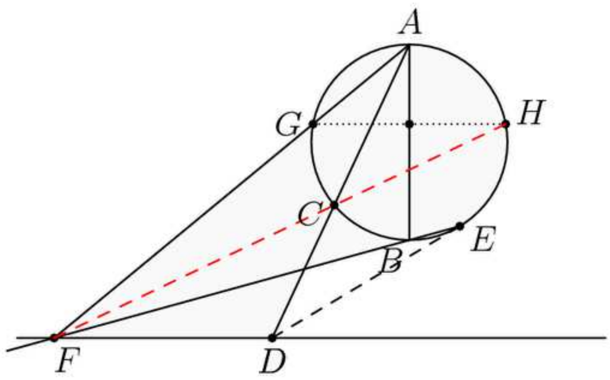
Zadanie 92. [Iran 2011] Niech ABC będzie trójkątem. Punkt O jest środkiem okręgu ω opisanego na ABC. Punkty M oraz N leżą na bokach AB oraz AC trójkąta. Okręg opisany na trójkącie AMN przecina ω w punkcie Q (różnym od A). Niech P będzie punktem wspólnym prostych MN oraz BC. Udowodnij, że PQ jest styczna do ω wtedy i tylko wtedy, gdy $OM = ON$.



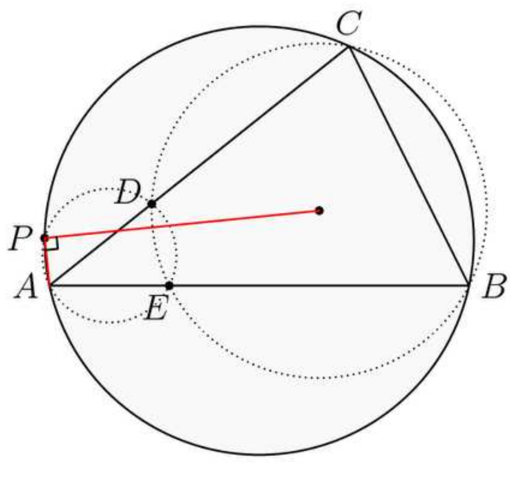
Zadanie 93. [ISL 2007] Niech M będzie środkiem boku BC trójkąta równoramiennego ABC, gdzie $AC = AB$. Na krótszym łuku MA okręgu opisanego na trójkącie ABM obieramy punkt X. Niech T będzie takim punktem we wnętrzu trójkąta BMA, że $\measuredangle TMX = 90^\circ$ oraz $TX = BX$. Udowodnij, że $\measuredangle MTB - \measuredangle CTM$ nie zalezy od wyboru punktu X.



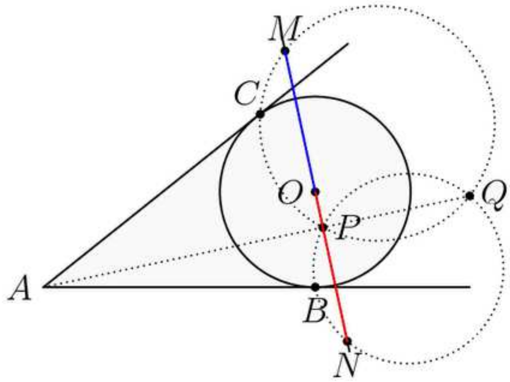
Zadanie 94. [Włochy TST 2005] Okrąg Γ oraz prosta l nie mają punktów wspólnych. Niech AB będzie średnicą okręgu Γ, prostopadłą do l, przy czym B jest bliżej l niż A. Obieramy punkt $C \neq A, B$ na okręgu Γ. Prosta AC przecina prostą l w punkcie D. Prosta DE jest styczna do Γ w punkcie E, przy czym punkty B, E leżą po tej samej stronie prostej AC. Prosta BE przecina l w punkcie F oraz AF przecina Γ w punkcie $G \neq A$. Niech H będzie odbiciem punktu G względem AB. Wykaż, że F, C, H są współliniowe.



Zadanie 95. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Okrąg ω o środku w punkcie O przechodzi przez punkty B oraz C oraz przecina odcinki AC oraz AB w punktach D oraz E. Niech $P \neq A$ będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ADE oraz Ω. Udowodnij, że $AP \perp PO$.



Zadanie 96. [All-Russian MO 2008] Okrąg ω o środku O jest styczny do półprostych zawierających ramiona kąta BAC (punkty B, C to dokładnie miejsca styczności kąta z ω). Weźmy punkt Q wewnątrz kąta BAC. Niech P należy do odcinka AQ tak, że $AQ \perp OP$. Prosta OP przecina okręgi ω_1, ω_2 opisane na trójkątach BPQ oraz CPQ w punktach M oraz N (różnymi od P). Wykaż, że $OM = ON$.



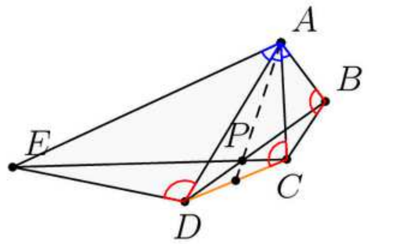
Zadanie 97. [OMO 2014] Niech $AXYBZ$ będzie pięciokątem wypukłym wpisanym w okrąg o średnicy AB. Prosta styczna do tego okręgu w punkcie Y przecina proste BX oraz BZ w punktach L oraz K. Przypuśćmy, że AY to dwusieczna kąta LAZ oraz $AY = YZ$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{AK}{AX} + \left(\frac{AL}{AB}\right)^2.$$

Zadanie 98. [ISL 2006] Rozważmy pięciokąt wypukły $ABCDE$ taki, że:

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAE, \quad \measuredangle ABC = \measuredangle ACD = \measuredangle ADE.$$

Niech P będzie punktem przecięcia prostych BD oraz CE. Wykaż, że prosta AP przechodzi przez środek boku CD.



Zadanie 99. [ISL 2011] Niech $A_1A_2A_3A_4$ będzie czworokątem, na którym NIE MOŻNA opisać okręgu. Niech O_1 oraz r_1 będą odpowiednio: środkiem i promieniem okręgu opisanego na trójkącie $A_2A_3A_4$. Analogicznie określamy punkty O_2, O_3, O_4 oraz r_2, r_3, r_4. Wykaż, że:

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

Zadanie 100. [USAMO 2008] Niech ABC będzie trójkątem ostrokatnym, w którym każde dwa boki mają różne długości. Niech M, N, P będą środkami odcinków BC, CA oraz AB. Niech symetralne odcinków AB oraz AC przecinają prostą AM w punktach D oraz E. Niech też proste BD oraz CE przecinają się w F, wewnątrz trójkąta ABC. Wykaż, że punkty A, N, F, P leżą na jednej prostej.