

Największy wspólny dzielnik

Zadania do samodzielnego rozwiązania
Warszaty matematyczne I LO w Koszalinie
Grupa starsza, 13.10.2020 r.

Zadanie 1. Na tablicy napisano liczbę pewną liczbę całkowitą dodatnią n . Władek i Robert grają w grę polegającą w każdej turze na odejmowaniu od liczby znajdującej się aktualnie na tablicy jednego z jej dzielników (można odjąć także 1 lub samą liczbę na tablicy) i zastępując liczbę na tablicy uzyskaną różnicą. Gracze wykonują te operacje naprzemiennie. Ten z graczy, który będzie musiał zapisać na tablicy 0 przegrywa. Grę zaczyna Władek. Dla jakich n istnieje strategia dająca Władowi zwycięstwo, niezależnie od ruchów Roberta?

Zadanie 2. Załóżmy, że liczba $a^2 + ab + b^2$ jest podzielna przez 9, przy czym liczby a, b są całkowite. Pokazać, że zarówno a , jak i b są wielokrotnościami liczby 3.

Zadanie 3. Wyznacz

$$\text{NWD}(2020! + 1, 2021!),$$

gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, dla $n > 1$.

Zadanie 4. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych umieszczono pionek w punkcie $(1,1)$. Pionkiem tym poruszać wolno według następujących zasad:

- z każdego punktu o współrzędnych (a, b) można przejść do $(2a, b)$ lub $(a, 2b)$,
- z każdego punktu o współrzędnych (a, b) można przejść do $(a - b, b)$, o ile $a > b$ lub do $(a, b - a)$, jeśli $a < b$.

Niech (x, y) będzie takim punktem, z którego da się dojść przy pomocy powyższych operacji z punktu $(1,1)$. Wykaż, że $\text{NWD}(x, y)$ jest potęgą liczby 2.

Zadanie 5. Liczby całkowite dodatnie a, b mają tę własność, że suma

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

jest liczbą całkowitą. Pokaż, że

$$\text{NWD}(a, b) \leq \sqrt{a+b}.$$