II Warsztaty Matematyczne w I LO

Geometria
Zadania konkursowe + niektóre rozwiązania

22 – 24 września 2008r.

Dzień 1, Grupa młodsza

Czas: 100 minut

Zadanie 1. (5p.) W trójkąt KLM wpisujemy okrąg o środku S, styczny do boków KL i KM odpowiednio w punktach P i Q. Punkt K jest środkiem odcinka PR (jest to definicja punktu R). Wykazać, że proste RQ i KS są równoległe.

Rozwiązanie: Zauważmy, że skoro $|KP| = |KQ| = |KR|$, to punkty P, Q, R leżą na okręgu o środku w punkcie K. Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym widzimy zatem, że $\measuredangle PKQ = 2\measuredangle PRQ$. Odcinek KS zawiera się w dwusiecznej kąta PKQ, a stąd $\measuredangle PKS = \measuredangle PRQ$.

Zadanie 2. (10p.) Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym równoramiennym, przy czym $\measuredangle BAC = 90°$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Prowadzimy przez A prostą prostopadłą do CM. Przecina ona bok BC w punkcie P. Wykazać, że $\measuredangle AMC = \measuredangle PMB$.

Rozwiązanie Na przedłużeniu odcinka AP obieramy punkt K taki, że $KB \perp AB$. Trójkąty ACM i BAK są przystające na mocy cechy kbk. Istotnie, $\measuredangle ACM = 90° - \measuredangle KAC = 90° - (90° - \measuredangle BAK = \measuredangle BAK$; $|CA| = |AB|$; $\measuredangle CAM = \measuredangle ABK$. Także trójkąty BPM i BPK są przystające. Mają one jeden bok wspólny, co więcej z poprzedniego przystawania mamy $|BM| = |BK|$. Wystarczy jeszcze zauważyć, że $\measuredangle PBM = 45° = \measuredangle PBK$ i dostajemy przystawanie na mocy cechy bkb. Wynika z niego, że $\measuredangle PMB = \measuredangle PKB$. Skoro jednak $ACM \equiv BAK$, to $\measuredangle PKB = \measuredangle AKB = \measuredangle AMC$.

Zadanie 3. (10p.) Niech ABC będzie takim trójkątem, dla którego $\measuredangle ACB = 60°$. Przez punkty D, E określamy spodki wysokości tego trójkąta opuszczone odpowiednio na odcinki: BC, AC. Punkt M jest środkiem odcinkiem AB. Udowodnić, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Rozwiązanie: Zauważmy, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg o środku w punkcie M. Istotnie $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB$. Co więcej, kąty te są proste, a więc AB jest średnicą tego okręgu. Łatwo widzieć, że $|EM| = |DM|$ jest po równością dwóch promieni tego okręgu. Zatem trójkąt DEM jest równoramienny. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $\measuredangle DME = 60°$. Skoro $\measuredangle ACD = 60°$, to z faktu, że $AD \perp CD$ wynika, że $\measuredangle CAD = 30°$. Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, zastosowanym do łuku DE wynika, że $2\measuredangle EAD = \measuredangle EMD = 60°$. Trójkąt DEM jest więc równoramienny i jeden z jego kątów to $60°$. To już implikuje, że jest on równoboczny.

Zadanie 4. (15p.) Dany jest trójkąt ABC o tej własności, że istnieje w jego wnętrzu punkt F spełniający: $\measuredangle FAB = \measuredangle FBA = 30°$. Na bokach AC, BC budujemy trójkąty równoboczne ACE oraz BCD (skierowane na zewnątrz trójkąta). Wykazać, że $|EF| = |DF|$.

Rozwiązanie: Niech F' będzie punktem symetrycznym do punktu F względem prostej zawierającej odcinek AB. Zauważmy na początek, że trójkąty BFF', AFF' są równoboczne. Istotnie, $|F'A| = |FA| = |FB| = |F'B|$, zaś $\measuredangle FAF' = 2\measuredangle FAB = 60^\circ = \measuredangle FBF'$. Wykażemy teraz, że następujące dwie pary trójkątów są przystające:

$$F'BC \equiv FBD, \quad F'AC \equiv FAE.$$

Istotnie, dla pierwszej pary wynika to z cechy bkb: $|F'B| = |FB|$, $|BC| = |BD|$, mamy też: $\measuredangle F'BC = \measuredangle 60^\circ + \measuredangle FBC = \measuredangle FBD$. Analogicznie postępujemy w przypadku drugiej pary. Zauważmy teraz, że łącząc te dwie informacje o przystawaniu dostajemy:

$$|EF| = |CF'| = |DF|.$$

Dzień 2, Grupa młodsza

Czas: 150 minut

Zadanie 1. (5p.) W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Udowodnij, że punkty B, C są równo oddalone od prostej AD.

Rozwiązanie: Zauważmy, że odległości punktów B, C od prostej zawierającej AD są niczym innym tylko wysokościami trójkątów ABD, ACD, poprowadzonymi na wspólną ich podstawę AD. Aby uzyskać tezę wystarczy wykazać, że pola tych trójkątów są równe. To jest jednak oczywiste, ponieważ pola tych trójkątów można policzyć drugim sposobem – wziąć wysokość opuszczoną z wierzchołka A. Wówczas 'podstawami' są odcinki BD i CD – z założenia równe sobie.

Zadanie 2. (5p.) Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ zbudowano (na zewnątrz kwadratu) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

Rozwiązanie: Łatwo widzieć, że $\measuredangle ADL = \measuredangle ABL = 150^\circ$. Szybki rachunek pokazuje także, że $\measuredangle KCL = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$. Oznacza to, że trójkąty ADL, ABK, KCL są przystające na mocy cechy *bkb*. W szczególności $|AL| = |LK| = |AK|$, co jest równoważne równoboczności trójkąta AKL.

Zadanie 3. (10p.) Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech punkt A będzie środkiem odcinka DB (jest to definicja punktu D). Niech E będzie środkiem boku BC. Odcinek DE przecina bok AC w punkcie X. Znaleźć wartość wyrażenia: $\frac{|CX|}{|AX|}$.

Rozwiązanie: Stosujemy tw. Menelausa do trójkąta ABC i punktów $D \in AB, X \in AC, E \in CB$. Skoro punkty te leżą na jednej prostej, to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1.$$

Z założeń zadania wiemy, że pierwszy z ułamków w tym iloczynie równy jest $1/2$, drugi zaś równy jest 1. Stąd $\frac{|CX|}{|AX|} = 2$.

Zadanie 4. (10p.) Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na jego przeciwprostokątnej BC budujemy do zewnątrz kwadrat $BCDE$. Niech O będzie środkiem tego kwadratu. Udowodnić, że AO to dwusieczna kąta CAB.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $\measuredangle COB$ jest, jako punkt przecięcia przekątnych kwadratu, równy 90°. Oznacza to, że $\measuredangle COB + \measuredangle CAB = 180^\circ$, a więc na czworokącie $CAOB$ można opisać okrąg. Na mocy tw. o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku widzimy, że $\angle OCB = \angle OAB = 45°$. Podobnie $\angle OBC = \angle OAB = 45°$. Istotnie więc prosta zawierająca odcinek OA jest dwusieczną kąta CAB.

Zadanie 5. (15p.) Na bokach AC, BC trójkąta ABC budujemy kwadraty $ACGH$ oraz $CBEF$. Udowodnić, że proste AF, BG, HE przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że trójkąty CBG i CFA są przystające na mocy cechy bkb. Istotnie, $|AC| = |CG|, |CF| = |CB|$, zaś $\angle ACF = \angle ACB + 90° = \angle BCG$. Niech P będzie punktem przecięcia prostych AF i BG. Aby pokazać tezę wystarczy udowodnić, że prosta EH przechodzi przez P. Zgodnie z uwagami wyżej, mamy: $\angle CBP = \angle CFP$, oraz $\angle CGP = \angle CAP$. Stąd na czworokątach $CPBF$ oraz $CPAG$ można opisać okręgi. Rozważmy pierwszy z nich. Jest on opisany na trójkącie CAG, a zatem GA jest średnicą tego trójkąta. Stąd także H leży na tym okręgu. Podobnie E leży na okręgu opisanym na czworokącie $CPAG$. Teraz już tylko krok do zakończenia, ponieważ z twierdzenia o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, $\angle KAG\angle KPG = 45°$. Podobnie $\angle EBF = \angle EPF = 45°$. Widzimy też, że proste AF i BG przecinają się pod kątem prostym (znowu twierdzenie o kątach wpisanych i opartych na łukach AG oraz BF). Stąd kąt KPE ma miarę 180°, czyli punkty K, P, E leżą na jednej prostej.

Zadanie 6. (15p.) Dany jest trójkąt ABC. Na bokach BC, CA, AB znajdują się punkty styczności D, E, F okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że proste zawierające odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: Z najmocniejszego twierdzenia geometrii mamy następujące równości: $|AF| = |AE|$, $|BD| = |BF|$, $|CD| = |CE|$. Widzimy, że:

$$\frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|AF|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CD|}{|AF|} = 1.$$

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy widzimy, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Dzień 3, Grupa młodsza
Czas: 100 minut

Zadanie 1 (5p.) Dany jest równoległobok $ABCD$. Na jego boku CD obieramy punkt P. Na bokach AD, BC wybieramy takie punkty E, F, że $|AE| = |CF|$. Punkt K jest przecięciem odcinków AP i EF, zaś punkt L jest punktem przecięcia odcinków BP i EF. Udowodnić, że:

$$[AKE] + [BLF] = [PKL].$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $2[APB] = [ABCD]$. Co więcej, figury $ABFE$ oraz $CDEF$ są przystające, zatem $2[ABFE] = 2[CDEF] = [ABCD]$. Zatem $[ABFE] = [ABP]$. Odejmując od tej równości stronami pole czworokąta $[ABLK]$, dostajemy tezę zadania.

Zadanie 2 (10p.) Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Niech E będzie takim punktem na boku CD, że $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{s}{t}$, gdzie s, t – pewne liczby dodatnie. Udowodnić, że:

$$[ABE] = \frac{t}{t+s}[ABC] + \frac{s}{s+t}[ABD].$$

Rozwiązanie: Niech h_D, h_E, h_C będą wysokościami trójkątów ADB, AEB, ACB opuszczonymi z wierzchołków D, E, C na bok AB. Wówczas z twierdzenia Talesa $h_E = \frac{t}{t+s}h_C + \frac{s}{t+s}h_D$. Wystarczy pomnożyć tę równość stronami przez $\frac{|AB|}{2}$ i dostajemy tezę zadania.

Zadanie 3 (10p.) Dany jest trójkąt ABC. Na bokach AC i BC obieramy takie punkty Q, P, że $\frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|CP|}{|PB|}$. Niech S będzie punktem przecięcia prostych AP i CQ. Wykazać, że $[ABS] = [PCQS]$.

Rozwiązanie: Patrzymy na iloraz $[ABQ]/[ABC]$. Jest on równy $|AQ|/|AC|$. Podobnie stosunek $[APC]/[ABC] = |CP|/|CB|$. Z założenia zatem, dwie otrzymane wielkości są równe. Oznacza to, że $[ABQ] = [APC]$. Jeżeli odejmiemy od tej równości stronami pole trójkąta AQS, wówczas otrzymamy tezę zadania.

Zadanie 4 (10p.) Podać inny niż na zajęciach dowód faktu, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Wskazówka: użyć np. prostych potęgowych...

Rozwiązanie: Jeżeli o_{AB}, o_{BC}, o_{CA} są okręgami o średnicach odpowiednio równych AB, BC, CA, wówczas wysokości trójkąta są prostymi potęgowymi odpowiednich par tych trójkątów (podobny trik, co na ćwiczeniach). Skoro jednak środki odcinków AB, BC, CA nie leżą na jednej prostej, to proste potęgowe rozważanych 3 okręgów przecinają się w jednym punkcie. W tym przypadku są to wysokości trójkąta ABC, co kończy dowód.

Zadanie 5 (15p.) Dany jest okrąg o i leżące na zewnątrz tego okręgu takie punkty A, B, że prosta zawierająca AB nie przechodzi przez środek o. Opisać konstrukcję cyrklem i linijką okręgu stycznego do o, przechodzącego przez punkty A, B. Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie: Przez punkty A, B prowadzimy dowolny okrąg o_1 przecinający okrąg o w dwóch punktach. Tę konstrukcję łatwo jest wykonać. Robimy symetralną odcinka AB, obieramy dostatecznie daleki punkt P na tej symetralnej i wykreślamy okrąg o promieniu AP. Załóżmy, że przecina on okrąg o w punktach C, D. Niech X będzie punktem przecięcia prostych AB i CD. Prowadzimy z X proste styczne do okręgu o. W ten sposób dostajemy punkty M_1, M_2. Okręgi opisane na trójkątach ABM_1, ABM_2 to okręgi przechodzące przez punkty A, B oraz styczne wewnętrznie i zewnętrznie (w zaleczności od położenia) do okręgu o. Wyjaśnienie: AB jest prostą potęgową okręgu, który chcemy skonstruować i okręgu o_1. Prosta CD jest prostą potęgową okręgu, który chcemy skonstruować i okręgu o. Oznacza to, że proste potęgowe okręgów: o, o_1 i tego, którego szukamy, przecinają się w punkcie X. Skoro szukany okrąg ma być styczny do o, to ich wspólna prosta potęgowa będzie styczną do o, przechodzącą przez punkt X.

Dzień 1, Grupa starsza

Czas: 100 minut

Zadanie 1. (5p.) Niech ABC będzie takim trójkątem, dla którego $\measuredangle ACB = 60°$. Przez punkty D, E określamy spodki wysokości tego trójkąta opuszczone odpowiednio na odcinki: BC, AC. Punkt M jest środkiem odcinkiem AB. Udowodnić, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Rozwiązanie: Zauważmy, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg o środku w punkcie M. Istotnie $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB$. Co więcej, kąty te są proste, a więc AB jest średnicą tego okręgu. Łatwo widzieć, że $|EM| = |DM|$ jest po równością dwóch promieni tego okręgu. Zatem trójkąt DEM jest równoramienny. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $\measuredangle DME = 60°$. Skoro $\measuredangle ACD = 60°$, to z faktu, że $AD \perp CD$ wynika, że $\measuredangle CAD = 30°$. Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, zastosowanym do łuku DE wynika, że $2\measuredangle EAD = \measuredangle EMD = 60°$. Trójkąt DEM jest więc równoramienny i jeden z jego kątów to $60°$. To już implikuje, że jest on równoboczny.

Zadanie 2. (10p.) Punkty A, B, C leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej, przy czym $|AB| < |BC|$. Punkty D, E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P, Q, przy czym punkt P należy do odcinka DE. Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że $|DP| = |DR|$.

Rozwiązanie: Kąt APC jest prosty jako kąt wpisany oparty na średnicy. Stąd $\measuredangle EAP = 90° - \measuredangle PAC = \measuredangle ACP$. Z kolei z równości łuków AP i CQ wynika równość kątów ACP i CAQ, skąd $\measuredangle EAP = \measuredangle BAR$. Trójkąty PAE i RBA są więc przystające (cecha kbk), co dowodzi, że $|EP| = |BR|$. Stąd $|DP| = |DR|$.

Zadanie 3. (10p.) Dany jest trójkąt ABC, dla którego $\measuredangle ABC < \measuredangle ACB$. Niech E, F będą punktami styczności okręgu o środku I, wpisanego w ten trójkąt, leżącymi odpowiednio na bokach AC, BC. Przez P oznaczamy rzut punktu P na prostą zawierającą odcinek AI. Wykazać, że punkty E, F, P leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie: Aby pokazać współliniowość punktów E, F, P wystarczy wykazać, że $\measuredangle IFP + \measuredangle EFI = 180°$. Niech $\alpha = \measuredangle IAB = \measuredangle IAE$, zaś $\beta = \measuredangle IBA = \measuredangle IBC$. Widzimy, że $\measuredangle EIF = 360° - \measuredangle AIB - \measuredangle AIE - \measuredangle BIF = 360° - (180° - \alpha - \beta) - (90 - \alpha) - (90 - \beta) = 2\alpha + 2\beta$. Skoro IE, IF są promieniami okręgu wpisanego, to trójkąt EIF jest równoramienny i $\measuredangle EFI = 90° - \alpha - \beta$. Wyznaczymy teraz miarę kąta IFP. Zauważmy, że skoro $\measuredangle IFB = \measuredangle IPB = 90°$, to na czworokącie $BPFI$ można opisać okrąg. Zatem $\measuredangle IFP = 90° + \measuredangle BFP = 90° + \measuredangle BIP$. Dalej: $BIP = 180° - 90° - (\beta + \measuredangle FBP) = 90° - \beta - (180° - 90° - \alpha - 2\beta) = \alpha + \beta$. Dodając wszystkie uzyskane przez siebie informacje widzimy, że: $\measuredangle IFP + \measuredangle EIF = (90° - \alpha - \beta) + (90° + \alpha + \beta) = 180°$.

Zadanie 4. (15p.) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Na odcinkach AB oraz BC wybieramy odpowiednio punkty Q, oraz P. Punkt przecięcia odcinka CQ z AP oznaczamy przez S. Załóżmy, że w czworokąty $PBQS$ oraz $CSAD$ można wpisać okręgi. Czy wynika stąd, że w $ABCD$ też można wpisać okrąg? Odp. uzasadnić.

Rozwiązanie: Niech O_1, O_2 to nazwy okręgów wpisanych odpowiednio w czworokąty $PBQS$ oraz $CSAD$. Niech X, Y leżące na odcinku AP należą odpowiednio do O_2, O_1 (są to punkty styczności). Podobnie przez W, Z oznaczamy punkty leżące na odcinku CQ, należące odpowiednio do O_2, O_1. Skoro w czworokąt $CSAD$ można wpisać okrąg, to: $|AS| + |CD| = |CS| + |AD|$. Mamy równość $|SY| = |SZ|$, więc po dodaniu jej stronami do poprzedniej otrzymamy: $|AY| + |CD| = |CZ| + |AD|$. Jeśli Y', Z' leżą odpowiednio na bokach AB, BC czworokąta $ABCD$ i są punktami jego styczności z O_2, to mamy:$|AY| = |AY'|, |CZ| = |CZ'|$. Dokonując podmiany w równości $|AY| + |CD| = |CZ| + |AD|$, otrzymujemy: $|AY'| + |CD| = |CZ'| + |AD|$. Pamiętając, że $|BY'| = |BZ'|$ i dodając tę równość do poprzedniej mamy:

$$|AB| + |CD| = |AY'| + |BY'| + |CD| = |CZ'| + |BZ'| + |AD| = |BC| + |AD|.$$

Wynik ten oznacza, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Dzień 2, Grupa starsza

Czas: 150 minut

Zadanie 1. (5p.) Udowodnić, że punkt wspólny środkowych trójkąta dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2 : 1$ (licząc od wierzchołka).

Rozwiązanie: Niech ABC będą wierzchołkami trójkąta, zaś D, E, F środkami boków BC, CA, AB. Punkt wspólny środkowych oznaczny przez P. Zastosujemy tw. Menelausa do trójkąta BCF i punktów $D \in BC, P \in CF, A \in BF$. Mamy:

$$\frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|CP|}{|FC|} \cdot \frac{|FA|}{|BA|}.$$

Pierwszy z tych ułamków równy jest 1, drugi jest szukanym stosunkiem podziału środkowej, trzeci zaś wynosi $1/2$. Stąd też $|CP|/|FC| = 2$.

Zadanie 2. (5p.) Niech E, F będą punktami styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC. Leżą one odpowiednio na bokach AC i BC. Udowodnić, że $|AE| = |DB|$.

Zadanie 3. (10p.) Dany jest trójkąt ABC. Na bokach BC, CA, AB znajdują się punkty styczności D, E, F okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że proste zawierające odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 4. (10p.) Na bokach AC, BC trójkąta ABC budujemy kwadraty $ACGK$ oraz $CBEF$. Udowodnić, że proste AF, BG, HE przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 5. (15p.) Dany jest trójkąt ABC oraz pewien punkt P leżący poza tym trójkątem. Rzutujemy punkt P na każdy z boków trójkąta i dostajemy punkty P_1, P_2, P_3. Pokazać, że jeśli te trzy rzuty leżą na jednej prostej, to P należy do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 6. (15p.) Dany jest trójkąt ABC. Mamy też dwa punkty: P, Q leżące na boku AB takie, że $\measuredangle PCA = \measuredangle QCB$. Wykazać, że wówczas zachodzi:

$$\frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|AQ|}{|QB|} = \left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2.$$

Dzień 3, Grupa starsza
Czas: 100 minut

Zadanie 1 (5p.) Dany jest trójkąt ABC. Na bokach AC i BC obieramy takie punkty Q, P, że $\frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|CP|}{|PB|}$. Niech S będzie punktem przecięcia prostych AP i CQ. Wykazać, że $[ABS] = [PCQS]$.

Zadanie 2 (10p.) Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ taki, że $|AE| = |DE|, |BC| = |CD|$, oraz $\measuredangle BAE = \measuredangle ABC = 90°$. Dwusieczne kątów AED i BCD przecinają się w punkcie P. Pokazać, że: $|AE| \cdot |BC| = |PD|^2, |DE| \cdot |DC| = |PD|^2$.

Zadanie 3 (10p.) Dany jest taki sześciokąt wypukły $ABCDEF$, że na czworokątach $ABCD, CDEF, EFAB$ można opisać okręgi. Wykazać, że na sześciokącie $ABCDEF$ też można opisać okrąg.

Zadanie 4 (10p.) Dany jest okrąg o i leżące na zewnątrz tego okręgu takie punkty A, B, że prosta zawierająca AB nie przechodzi przez środek o. Opisać konstrukcję cyrklem i linijką okręgu stycznego do o, przechodzącego przez punkty A, B. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 5 (15p.) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, na którym można opisać okrąg. Rozpatrujemy wszystkie punkty P należące do wnętrza tego czworokąta, że $\measuredangle PAD + \measuredangle PBC = \measuredangle DPC$. Wykazać, że punkty takie muszą leżeć na jednej prostej lub na jednym okręgu.

II Warsztaty Matematyczne w I LO
Pierwsza praca domowa

Grupa młodsza

Zadanie 1. (5p.) Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC, przy czym $\measuredangle BAC = 90°$. Na bokach AB i AC wybieramy takie punkty D, E, że $|AD| = |CE|$. Przez A prowadzimy prostą prostopadłą do DE, która przecina bok BC w punkcie P. Wykazać, że $|AP| = |DE|$.

Zadanie 2. (5p.) Udowodnić, że jeżeli dwusieczne kątów wewnętrznych trapezu $ABCD$ tworzą czworokąt, to można na tym czworokącie opisać okrąg.

Zadanie 3. (15p.) Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB mamy pewien punkt D. Niech O, O_1, O_2 będą okręgami wpisanymi odpowiednio w trójkąty ABC, ACD oraz BCD i przyjmijmy, że punkty styczności tych okręgów z bokiem AB oznaczamy przez E, F, G. Wykazać, że $|EF| = |DG|$.

Grupa starsza

Zadanie 1. (5p.) Kąt ABC trójkąta ABC ma miarę 60°. Dwusieczne AD i CE przecinają się w punkcie M. Wykazać, że $|DM| = |EM|$.

Zadanie 2. (5p.) Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB mamy pewien punkt D. Niech O, O_1, O_2 będą okręgami wpisanymi odpowiednio w trójkąty ABC, ACD oraz BCD i przyjmijmy, że punkty styczności tych okręgów z bokiem AB oznaczamy przez E, F, G. Wykazać, że $|EF| = |DG|$.

Zadanie 3. (15p.) Dany jest czworokąt $ABCD$, na którym opisano okrąg O. Przyjmijmy, że P, Q są środkami łuków AB, CD. Niech E będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów BAD i ADC, zaś F – punktem przecięcia dwusiecznych kątów ABC i BCD. Wykazać, że $PQ \perp EF$.

II Warsztaty Matematyczne w I LO
Druga praca domowa

Grupa młodsza

Zadanie 1. (5p.) W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AA' i BB'. Proste zawierające te wysokości przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że jeżeli $|AP| = |BP|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 2. (10p.) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ i punkt P w jego wnętrzu taki, że $\measuredangle ADP + \measuredangle BCP = \measuredangle APB$. Uzasadnić, że okręgi opisane na trójkątach ADP i BCP są styczne zewnętrznie.

Zadanie 3. (15p.) Niech AA' będzie wysokością trójkąta ostrokątnego ABC, zaś S środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że $\measuredangle BAA' = \measuredangle SAC$.

Grupa starsza

Zadanie 1. (5p.) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ i punkt P w jego wnętrzu taki, że $\measuredangle ADP + \measuredangle BCP = \measuredangle APB$. Uzasadnić, że okręgi opisane na trójkątach ADP i BCP są styczne zewnętrznie.

Zadanie 2. (10p.) Niech AA' będzie wysokością trójkąta ostrokątnego ABC, zaś S środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że $\measuredangle BAA' = \measuredangle SAC$.

Zadanie 3. (15p.) Dany jest równoległobok $ABCD$ W jego wnętrzu obieramy sobie punkt P. Niech K, L będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na bokach AB, AD tego równoległoboku, że $QL||AB, QK||AL$. Przez P oznaczmy teraz punkt przecięcia prostych DK i BL. Udowodnić, że punkty P, Q, C leżą na jednej prostej.