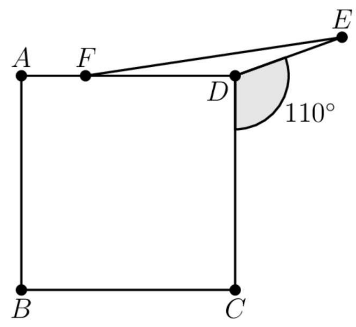
KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień pierwszy

1. Zgodnie z rysunkiem poniżej, punkt E leży po przeciwnej stronie prostej AD niż punkt C, przy czym $\measuredangle CDE = 110^\circ$. Punkt F leży na odcinku AD tak,że $DE = DF$. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Wyznacz miarę kąta AFE.



2. Dodatnie liczby całkowite a, b, c wszystkie mają identyczne cyfry jedności. Wykaż, że przynajmniej jedna z liczb $a^2 + 2019$, $b^2 + 2020$, $c^2 + 2021$ jest podzielna przez 5.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Udowodnij, że

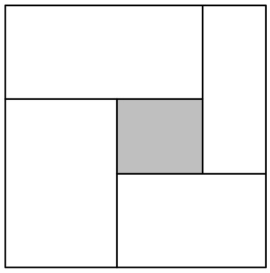
$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0,$$

gdzie $\max(x, y)$ oznacza nie mniejszą spośród liczb x i y.

4. Kolejne liczby naturalne od 1 do 100 wypisano od lewej do prawej w pewnej kolejności. Liczbę występującą w tym ciągu nazwiemy *prawostronnie maksymalną*, jeśli jest ona większa od każdej liczby znajdującej się w tym ciągu na prawo od niej. Analogicznie definiujemy liczbę *lewostronnie maksymalną*. Załóżmy, że w rozważanym ciągu jest dokładnie k liczb prawostronnie maksymalnych i dokładnie k liczb lewostronnie maksymalnych. Znajdź największą możliwą wartość k.

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień drugi.

1. Pięć prostokątów A, B, C, D, E ustawiono w kwadrat, jak na rysunku poniżej. Prostokąty te mają wymiar 1×6, 2×4, 5×6, 2×7 oraz 2×3 (rysunek nie jest zaś prawidłowo wyskalowany). Który z pięciu prostokątów może być na pozycji zacieniowanego prostokąta?



2. Wyznacz liczbę pięciocyfrowych liczb naturalnych n spełniających jednocześnie dwa warunki:

   - n oraz jej suma cyfr są podzielne przez 5,
   - pierwsza i ostatnia cyfra n są takie same.

3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Wykaż, że liczba $n = (ab - cd)(bc - ad)(ac - bd)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Janosik ponumerował wierzchołki pewnego sześcianu liczbami $1, 2, \ldots, 8$, a następnie zapisał na każdej krawędzi tego sześcianu sumę liczb znajdujących się na jej końcach. Czy jest możliwe, aby wszystkie liczby zapisane na krawędziach były parami różne?

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień trzeci.

1. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym kąt wewnętrzny CDA jest wklęsły. Przypuśćmy, że $\angle DAB = \angle BCD$ oraz $\angle ABC = \angle CDA - 180°$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ ma dwie pary boków prostopadłych.

2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, których najmniejszy dzielnik większy od 1 jest 45 razy mniejszy od największego dzielnika właściwego (mniejszego od n).

3. Marek pomyślał o pięciu liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e, dodał każde dwie z nich, i zapisał na kartce wartości dziesięciu uzyskanych w ten sposób sum. Następnie Marek przekazał tę kartkę Szymonowi. Czy Szymon, tylko na podstawie zapisanych na kartce dziesięciu liczb, może wywnioskować o jakich pięciu liczbach pomyślał Marek?

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ spełniający warunki $\angle BCD = 90°$, $\angle CDA = 150°$ oraz $BC = AD$. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wyznacz miarę kąta między prostymi MN i CD.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień pierwszy.

1. Punkt X leży na odcinku A, a punkty C i D — po przeciwległych stronach tego odcinka, przy czym spełnione są równości:

$$AX = CX = 3, \quad BX = DX = 7, \quad AC = BC \quad AD = BD.$$

   Wykaż, że $CD < 9$.

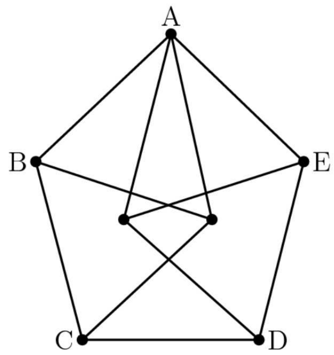
2. Niech $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $a_k \leqslant 2^k$.

3. Czy można wpisać w każde pole nieskończonej szachownicy pewną dodatnią liczbę całkowitą w taki sposób, aby suma liczb wpisanych w pola w każdego prostokąta rozmiaru $n \times m$ złożonego z nm pól tej szachownicy była podzielna przez $n + m$?

4. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Niech $X \neq B$ będzie punktem na prostej AB spełniającym $XC = BC$. Analogicznie, niech $Y \neq B$ będzie punktem na prostej BC spełniającym $AB = AY$. Udowodnij, że $\angle DYX = \angle DXY$.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień drugi.

1. Poniższa figura złożona jest z 11 odcinków długości 2. Wyznacz pole pięciokąta $ABCDE$.



2. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Wyznacz wartość liczby $x+y$.

3. Dany jest ciąg liczb całkowitych (a_n). Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n sumę pierwszych n wyrazów tego ciągu, czyli liczbę $a_1+a_2+\ldots+a_n$, oznaczamy przez S_n. Załóżmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość $S_n = 3n^2$. Udowodnij, że różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest stała.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 90°$. Punkt M jest środkiem boku AB, a prosta równoległa do prostej BC i przechodząca przez punkt M przecina prostą AC w punkcie D. Oznaczmy środek odcinka CD przez E. Załóżmy, że proste BD i CM są prostopadłe. Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień trzeci.

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości i przecinają się w punkcie X. Załóżmy, że $\angle AXB = 60^\circ$. Wykaż, że istnieje taki punkt Y, że trójkąty ABY i CDY są równoboczne.

2. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

3. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n możemy rozbić zbiór ułamków

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

na takie dwa rozłączne podzbiory, że iloczyny elementów tych podzbiorów są równe?

4. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 3. Na odcinkach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty E i F, że $AE = AF = 2$. Wyznacz długość cięciwy okręgu opisanego na trójkącie AEF zawartej w prostej BD.