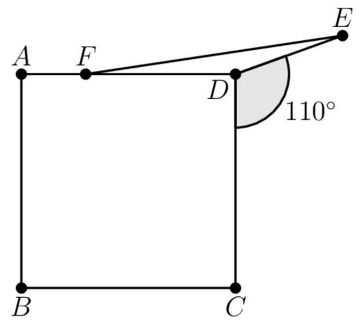
KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień pierwszy

1. Zgodnie z rysunkiem poniżej, punkt E leży po przeciwnej stronie prostej AD niż punkt C, przy czym $\measuredangle CDE = 110°$. Punkt F leży na odcinku AD tak,że $DE = DF$. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Wyznacz miarę kąta AFE.



Rozwiązanie. Kąt ADC jest prosty, więc miara kąta wklęsłego ADE równa jest $200°$. Stąd kąt wewnętrzny trójkąta równoramiennego DEF przy wierzchołku D ma miarę $360° - 200° = 160°$. Wnioskujemy stąd, że $\measuredangle DEF = \measuredangle DFE = \frac{1}{2}(180° - 160°) = 10°$. Stąd $\measuredangle AFE = 180° - 10° = 170°$.

2. Dodatnie liczby całkowite a, b, c wszystkie mają identyczne cyfry jedności. Wykaż, że przynajmniej jedna z liczb $a^2 + 2019$, $b^2 + 2020$, $c^2 + 2021$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie. Gdy cyfra jedności liczby a równa jest 1, 4, 6 lub 9, wówczas cyfra jedności liczby $a^2 + 2019$ równa jest 0 lub 5, więc liczba ta jest podzielna przez 5. W przypadku, gdy cyfra jedności liczby b równa jest 0 lub 5, liczba $b^2 + 2020$ jest podzielna przez 5.

Wreszcie, w przypadku gdy cyfra jedności liczby c równa jest 2, 3, 7 lub 8, liczba $c^2 + 2021$ jest podzielna przez 5.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Udowodnij, że

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0,$$

gdzie $\max(x, y)$ oznacza nie mniejszą spośród liczb x i y.

Rozwiązanie. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\max(x, y) \geqslant \frac{1}{2}(x + y),$$

przy czym równość ma miejsce jedynie, gdy $x = y$. Zatem rozważana suma maksimów ograniczona jest z dołu przez liczbę

$$\frac{(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d)}{2} = \frac{3(a+b+c+d)}{2} = 0.$$

4. Kolejne liczby naturalne od 1 do 100 wypisano od lewej do prawej w pewnej kolejności. Liczbę występującą w tym ciągu nazwiemy *prawostronnie maksymalną*, jeśli jest ona większa od każdej liczby znajdującej się w tym ciągu na prawo od niej. Analogicznie definiujemy liczbę *lewostronnie maksymalną*. Załóżmy, że w rozważanym ciągu jest dokładnie k liczb prawostronnie maksymalnych i dokładnie k liczb lewostronnie maksymalnych. Znajdź największą możliwą wartość k.

Rozwiązanie. Jeśli wypiszemy liczby od 1 do 100 w następujący sposób:

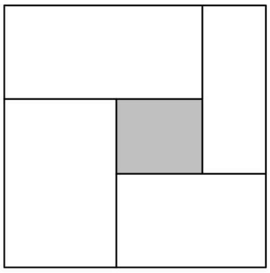
$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 48,\ 49,\ 100,\ 50,\ 99,\ 98,\ \ldots,\ 53,\ 52,\ 51,$$

to pierwsze 50 wypisanych liczb stanowi zbiór wszystkich liczb lewostronnie maksymalnych, zaś liczby prawostronnie maksymalne to: 100 oraz liczby od 99 do 51.

Rozważmy teraz dowolny ciąg liczb od 1 do 100. Z uwagi na obecność liczby 100 wśród wypisanych liczb, żadna liczba mniejsza od 100 nie może być jednocześnie lewostronnie i prawostronnie maksymalna. Gdyby jednak liczba k była większa od 50, wtedy co najmniej dwie z liczb od 1 do 100 byłyby jednocześnie lewostronnie i prawostronnie maksymalne. Zatem największa możliwa wartość k równa jest 50.

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień drugi.

1. Pięć prostokątów A, B, C, D, E ustawiono w kwadrat, jak na rysunku poniżej. Prostokąty te mają wymiar 1×6, 2×4, 5×6, 2×7 oraz 2×3 (rysunek nie jest zaś prawidłowo wyskalowany). Który z pięciu prostokątów może być na pozycji zacieniowanego prostokąta?



Rozwiązanie. Suma pól wszystkich prostokątów wynosi 64, więc rozważany kwadrat ma bok długości 8. Kwadrat ten ma zatem obwód równy 32. Zauważmy, że jest to jednocześnie suma połów obdodów niezacieniowanych prostokątów. Połowy obwodów pięciu rozważanych prostokątów są równe odpowiednio $7, 6, 11, 9, 5$. Suma tych liczb równa jest 38. Stąd zacieniowany prostokąt ma rozmiary 2×4.

2. Wyznacz liczbę pięciocyfrowych liczb naturalnych n spełniających jednocześnie dwa warunki:

- n oraz jej suma cyfr są podzielne przez 5,
- pierwsza i ostatnia cyfra n są takie same.

Rozwiązanie. Niech $n = \overline{abcde}$, gdzie a, b, c, d, e to kolejne cyfry w zapisie dziesiętnym liczby n. Zgodnie z cechą podzielności przez 5, cyfra e jest równa 0 lub 5. Z drugiego warunku opisującego liczbę n wynika, że $e = a \neq 0$, więc $a = e = 5$.

Zgodnie z założeniem, suma cyfr liczby n, równa $10 + b + c + d$, jest podzielna przez 5. Twierdzimy, że dla każdego wyboru pary cyfr b i c (po 10 wyborów dla każdej cyfry) cyfra d przyjąć może dokładnie 2 wartości. Rzeczywiście, oznaczając przez r resztę z dzielenia liczby $b + c$ przez 5, widzimy że dla $r \neq 0$, cyfra d może być równa $5 - r$ lub $10 - r$, a dla $r = 0$ mamy możliwości $d = 0$ lub $d = 5$. W rezultacie liczba pięciocyfrowych liczb spełniających warunki zadania równa jest $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1 = 200$.

3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Wykaż, że liczba $n = (ab - cd)(bc - ad)(ac - bd)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Mamy $d = -(a + b + c)$. Wstawiając tę zależność do każdego z wyrażeń $ab - cd$, $bc - ad$, $ac - bd$, uzyskujemy

$$ab - cd = ab + c(a + b + c) = ab + ac + bc + c^2 = (a + c)(b + c),$$
$$bc - ad = bc + a(a + b + c) = bc + a^2 + ab + ac = (a + c)(a + b),$$
$$ac - bd = ac + b(a + b + c) = ac + ab + b^2 + bc = (a + b)(b + c).$$

W rezultacie $n = ((a + b)(b + c)(a + c))^2$.

4. Janosik ponumerował wierzchołki pewnego sześcianu liczbami $1, 2, \ldots, 8$, a następnie zapisał na każdej krawędzi tego sześcianu sumę liczb znajdujących się na jej końcach. Czy jest możliwe, aby wszystkie liczby zapisane na krawędziach były parami różne?

   Rozwiązanie. Największa możliwa wartość wpisana na krawędzi sześcianu równa jest $8 + 7 = 15$, a najmniejsza możliwa wartość wynosi $1 + 2 = 3$. W rezultacie możliwe jest zapisanie na krawędziach sześcianu jedynie jednej z 13 wartości.

   Wykażemy, że zarówno jedna z liczb 3, 4, 5, 6, jak i jedna z liczb 12, 13, 14, 15 nie mogą być zapisane na krawędzi sześcianu. Będzie to oznaczać, że mamy 11 możliwych liczb, które zapisać można na krawędzi. Skoro jednak krawędzi jest 12, to nie jest możliwe, aby wszystkie liczby zapisane na krawędziach były parami różne.

   Przypuśćmy nie wprost, że każda z wartości 3, 4, 5, 6 występuje na jednej z krawędzi sześcianu. Oznacza to, że Janosik nadał liczby 1 i 2 wierzchołkom połączonym krawędzią — inaczej nie istniałaby krawędź o wartości 3. Podobnie wierzchołki ponumerowane liczbami 1 i 3 mają wspólną krawędź o wartości 4. Z tego wynika, że wierzchołki ponumerowane liczbami 2 i 3 nie są połączone krawędzią, więc żeby powstała krawędź o wartości 5, wierzchołek o numerze 4 musi być połączony krawędzią z wierzchołkiem 1. Z tego zaś wynika, że wierzchołek 4 nie jest połączony krawędzią z wierzchołkiem 2. Skoro jednak mamy na pewnej krawędzi wartość 6, to wierzchołek 1 musi mieć wspólną krawędź również z wierzchołkiem 5, co oznacza, że jeden wierzchołek sześcianu połączony jest krawędziami z czterema innymi wierzchołkami. Uzyskaliśmy sprzeczność. Przypadek jednoczesnego wystąpienia krawędzi z liczbami 12, 13, 14, 15 wykluczamy analogicznie.

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień trzeci.

1. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym kąt wewnętrzny CDA jest wklęsły. Przypuśćmy, że $\angle DAB = \angle BCD$ oraz $\angle ABC = \angle CDA - 180^\circ$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ ma dwie pary boków prostopadłych.

   Rozwiązanie. Oznaczmy przez E punkt przecięcia prostych AD oraz BC, a przez F punkt przecięcia prostych CD oraz AB (rys. 4). Z warunków zadania mamy

   $$\angle CDE = \angle CDA - 180^\circ = \angle ABC \quad \text{oraz} \quad \angle DCE = \angle BAE,$$

   więc korzystając z równości sum miar kątów w trójkątach CDE i ABE, uzyskujemy $\angle DEC = \angle AEB = 90^\circ$. Analogicznie uzyskujemy $\angle CFB = 90^\circ$.

2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, których najmniejszy dzielnik większy od 1 jest 45 razy mniejszy od największego dzielnika właściwego (mniejszego od n).

   Rozwiązanie. Oznaczmy przez d najmniejszy dzielnik liczby n większy od 1. Zauważmy, że największym dzielnikiem właściwym liczby n jest liczba $\frac{n}{d}$. Gdyby bowiem istniał większy dzielnik właściwy liczby m równy x, to liczba $\frac{n}{x}$ byłaby dzielnikiem n mniejszym od d i większym od 1 (skoro $x < n$), co jest niemożliwe.

   Skoro liczba $45d$ jest dzielnikiem liczby n, to liczba ta jest podzielna przez 3 i w rezultacie $d \leqslant 3$. Uzyskujemy zatem dwie możliwości: $d = 2$ i $d = 3$.

   Wiemy jednakże, że największy dzielnik właściwy liczby n to z jednej strony $45d$, a z drugiej strony — $\frac{n}{d}$. Stąd

   $$45d = \frac{n}{d},$$

   czyli $n = 45d^2$. Zatem liczba n jest równa $45 \cdot 4 = 180$ lub $45 \cdot 9 = 405$. Bezpośrednio sprawdzamy, że obydwie uzyskane liczby spełniają warunki zadania.

3. Marek pomyślał o pięciu liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e, dodał każde dwie z nich, i zapisał na kartce wartości dziesięciu uzyskanych w ten sposób sum. Następnie Marek przekazał tę kartkę Szymonowi. Czy Szymon, tylko na podstawie zapisanych na kartce dziesięciu liczb, może wywnioskować o jakich pięciu liczbach pomyślał Marek?

   Rozwiązanie. Zauważmy, że suma wszystkich dziesięciu liczb zapisanych na kartce to $4(a + b + c + d + e)$. W szczególności Szymon zna wartość sumy $a + b + c + d + e$.

   Problem postawiony w zadaniu nie zależy od kolejności liczb a, b, c, d, e. Załóżmy więc bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Wtedy najmniejszą liczbą na kartce Marka jest $a + b$, drugą najmniejszą liczbą jest zaś $a + c$. Podobnie największą liczbą na kartce jest $d + e$, a drugą największą — $c + e$.

   Z powyższych obserwacji wynika, że jeśli Szymon odejmie od sumy $a + b + c + d + e$ najmniejszą oraz największą z liczb napisanych na kartce, to otrzyma liczbę c. Na tej podstawie, znając wartości $a + c$ oraz $c + e$, Szymon wyznacza liczby a oraz e

   $$(a + c) - c = a \quad \text{oraz} \quad (c + e) - c = e,$$

   a następnie wyznacza liczby b oraz d

   $$(a + b) - a = b \quad \text{oraz} \quad (d + e) - e = d.$$

   W rezultacie Szymon umie rozpozna liczby a, b, c, d, e pomyślane przez Marka.

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ spełniający warunki $\angle BCD = 90^\circ$, $\angle CDA = 150^\circ$ oraz $BC = AD$. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wyznacz miarę kąta między prostymi MN i CD.

   Rozwiązanie. Niech punkt K będzie obrazem punktu C w symetrii względem punktu M. Skoro $AM = MB$, to czworokąt $ACBK$ jest równoległobokiem, skąd $AK = BC = AD$. W szczególności trójkąt ADK jest równoramienny.

   Skoro czworokąt $ACBK$ jest równoległobokiem, to $\angle KAB = \angle ABC$ oraz:

$$\angle KAD = \angle BAD + \angle KAB = \angle BAD + \angle ABC = 360^\circ - 150^\circ - 90^\circ = 120^\circ.$$

   Zauważmy wreszcie, że proste DK i MN są równoległe, gdyż MN jest linią środkową w trójkącie DCK. Zatem proste MN i CD przecinają się pod kątem 60°.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień pierwszy.

1. Punkt X leży na odcinku AB, a punkty C i D — po przeciwległych stronach tego odcinka, przy czym spełnione są równości:

$$AX = CX = 3, \quad BX = DX = 7, \quad AC = BC \quad AD = BD.$$

Wykaż, że $CD < 9$.

Rozwiązanie. Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AB oraz CD. Zauważmy, że prosta CD jest osią symetrii czworokąta $ADBC$. Odcinki AB oraz CD są więc prostopadłe i $\angle APC = 90° = \angle APD$.

Punkt P jest środkiem odcinka AB, skąd wnioskujemy, że

$$AP = \frac{AX + BX}{2} = 5.$$

Mamy również $XP = AP - AX = 5 - 3 = 2$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów CPX oraz DPX:

$$CP = \sqrt{XC^2 - XP^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5},$$
$$DP = \sqrt{XD^2 - XP^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

W rezultacie

$$CD = CP + DP = 4\sqrt{5} = \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9.$$

2. Niech $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $a_k \leqslant 2^k$.

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że teza nie jest spełniona i oznaczmy przez k najmniejszą liczbę naturalną, dla której $a_k > 2^k$. Oczywiście $k > 2$, wobec czego możemy zapisać

$$a_{k-3} \leqslant 2^{k-3}, \quad a_{k-2} \leqslant 2^{k-2}, \quad a_{k-1} \leqslant 2^{k-1}.$$

Stąd uzyskujemy

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} \leqslant 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} = 2^{k-3}(4+2+1) < 2^{k-3} \cdot 8 = 2^k,$$

co przeczy założeniu $a_k > 2^k$.

3. Czy można wpisać w każde pole nieskończonej szachownicy pewną dodatnią liczbę całkowitą w taki sposób, aby suma liczb wpisanych w pola w każdego prostokąta rozmiaru $n \times m$ złożonego z nm pól tej szachownicy była podzielna przez $n + m$?

Rozwiązanie. Przypuśćmy nie wprost, że odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania jest twierdząca. Niech $N > 1$ będzie liczbą całkowitą.

Zauważmy, że dowolny prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ można podzielić na dwa prostokąty rozmiarów $1 \times (N-1)$. Suma liczb wpisanych w pola każdego z tych prostokątów jest podzielna przez N. A zatem także suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ jest podzielna przez N.

Z drugiej strony, prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ można podzielić na prostokąt rozmiaru $2 \times (N-2)$ i prostokąt rozmiaru 2×1. Skoro zarówno suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ jest podzielna przez N, jak i suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru $2 \times (N-2)$ jest podzielna przez N, to również suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru 2×1 jest podzielna przez N.

Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż suma dwóch dodatnich liczb całkowitych nie może być podzielna przez dowolną liczbę całkowitą większą od 1.

4. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Niech $X \neq B$ będzie punktem na prostej AB spełniającym $XC = BC$. Analogicznie, niech $Y \neq B$ będzie punktem na prostej BC spełniającym $AB = AY$. Udowodnij, że $\angle DYX = \angle DXY$.

Rozwiązanie. Uzasadnimy, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające. Z danych równości odcinków oraz z założenia, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, mamy równości długości odpowiednich boków trójkątów DAY oraz XCD

$$AY = AB = CD \quad \text{oraz} \quad CX = CB = AD.$$

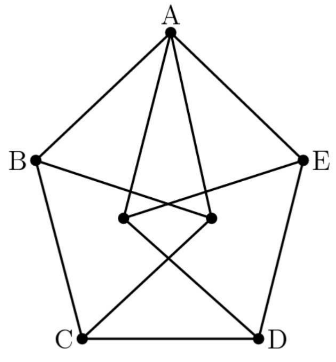
Pozostaje wykazać równość miar kątów YAD oraz XCD. Skoro $\angle ABY = \angle CBX$, i skoro trójkąty ABY oraz CBX są równoramienne, to mamy $\angle YAB = \angle XCB$. Ponadto, ponieważ $ABCD$ jest równoległobokiem, więc także $\angle DAB = \angle BCD$. W konsekwencji

$$\angle YAD = \angle YAB + \angle DAB = \angle XCB + \angle BCD = \angle XCD.$$

Wykazaliśmy więc, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $DY = DX$ i w konsekwencji $\angle DYX = \angle DXY$.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień drugi.

1. Poniższa figura złożona jest z 11 odcinków długości 2. Wyznacz pole pięciokąta $ABCDE$.



Rozwiązanie. Pole pięciokąta $ABCDE$ jest sumą pól trójkątów ABC, ACD oraz ADE. Pierwszy i ostatni z tych trójkątów ma pole równe polu trójkąta równobocznego o polu 2, czyli $\sqrt{3}$. Skoro $AC = AD = 2\sqrt{3}$ oraz $CD = 2$, to z twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że wysokość trójkąta ACD opuszczona z wierzchołka A ma długość $\sqrt{11}$. Zatem pole trójkąta ACD jest równe $\sqrt{11}$.

2. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Wyznacz wartość liczby $x+y$.

Rozwiązanie. Żadna z liczb $x^2+\sqrt{x^2+1}$ oraz $y^2+\sqrt{y^2+1}$ nie jest równa zero, gdyż ich iloczyn jest niezerowy. Zatem

$$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{y^2+1}-y}{y^2+1-y^2} = \sqrt{y^2+1}-y,$$

czyli $x+y = \sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$. Z racji symetrii liczb x i y w rozważanym problemie, zamieniając role x i y, uzyskujemy $x+y = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}$. Oznacza to, że $2(x+y) = 0$. W rezultacie liczba $x+y$ jest równa 0.

3. Dany jest ciąg liczb całkowitych (a_n). Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n sumę pierwszych n wyrazów tego ciągu, czyli liczbę $a_1+a_2+\ldots+a_n$, oznaczamy przez S_n. Załóżmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość $S_n = 3n^2$. Udowodnij, że różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest stała.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla każdego $n \geqslant 2$ mamy $a_n = S_n - S_{n-1}$. Stąd

$$a_{n+1} - a_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n.$$

Korzystając z wzoru na sumę n pierwszych elementów ciągu (a_n), uzyskujemy:

$$S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n = 3((n+1)^2 + (n-1)^2 - 2n^2) =$$

$$= 3(n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n + 1 - 2n^2) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Otrzymaliśmy zatem dla każdego $n \geqslant 1$ równość $a_{n+1} - a_n = 6$.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 90°$. Punkt M jest środkiem boku AB, a prosta równoległa do prostej BC i przechodząca przez punkt M przecina prostą AC w punkcie D. Oznaczmy środek odcinka CD przez E. Załóżmy, że proste BD i CM są prostopadłe. Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.

   Rozwiązanie. Niech punkt F będzie odbiciem punktu C względem punktu M. Powstały czworokąt $ACBF$ jest wówczas prostokątem oraz $CM = MF$.

   Proste DM i BC są równoległe oraz punkt M jest środkiem boku AB, co oznacza, że punkt D jest środkiem odcinka AC. Zatem z symetrii zauważamy, że prosta DF jest prostopadła do prostej AB, skoro proste BD i CM są prostopadłe.

   Punkt E jest środkiem odcinka DC, a punkt M jest środkiem odcinka CF, zatem EM jest linią środkową w trójkącie DCF, czyli jest równoległa do prostej DF. Stąd wynika, że proste EM oraz DF są równoległe, co oznacza z kolei, że proste EM i AB są prostopadłe.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień trzeci.

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości i przecinają się w punkcie X. Załóżmy, że $\angle AXB = 60^\circ$. Wykaż, że istnieje taki punkt Y, że trójkąty ABY i CDY są równoboczne.

   Rozwiązanie. Niech Y będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB, co punkt X, że trójkąt ABY jest równoboczny. Wykażemy, że trójkąt CDY jest równoboczny. W tym celu uzasadnimy, że zachodzą równości $CY = DY$ oraz $\angle CYD = 60^\circ$.

   W celu wykazania, że $CY = DY$ uzasadnimy, że trójkąty ACY i BDY są przystające (cecha bok–kąt–bok). Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}\angle BAY + \angle ABY &= 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ - 60^\circ\\ &= \angle BAX + \angle ABX\\ &= \angle BAY - \angle XAY + \angle ABY + \angle XBY,\end{aligned}$$

   co oznacza, że $\angle XAY = \angle XBY$. Ponieważ $AY = BY$, $\angle XAY = \angle XBY$ oraz $AC = BD$, więc trójkąty ACY i BDY są przystające. Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned}\angle CYD &= \angle BYD - \angle BYC\\ &= \angle AYC - \angle BYC = \angle AYB = 60^\circ.\end{aligned}$$

   Stąd rzeczywiście $\angle CYD = 60^\circ$, a to w połączeniu z równością $CY = DY$ oznacza, że trójkąt CYD jest równoboczny.

2. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

   Rozwiązanie. Skorzystajmy ze wzoru na różnicę n-tych potęg:

$$(n+1)^n - 1 = (n+1)^n - 1^n = n((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1).$$

   Wystarczy zatem udowodnić, że $(n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1$ jest liczbą podzielną przez n. Dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej k liczba $(n+1)^k$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez n. Zatem suma n kolejnych naturalnych potęg liczby $n+1$ jest podzielna przez n. Stąd liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

3. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n możemy rozbić zbiór ułamków

$$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots\ ,\ \frac{n-1}{n}\right\}$$

   na takie dwa rozłączne podzbiory, że iloczyny elementów tych podzbiorów są równe?

   Rozwiązanie. Załóżmy, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n możemy dokonać rozbicia zbioru ułamków opisanego w zadaniu. Jeżeli oznaczymy wspólną wartość iloczynu elementów tych podzbiorów jako A, to uzyskamy równość

$$A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ \ldots\ \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

   Zauważmy, że A jest liczbą wymierną, gdyż iloczyn liczb wymiernych jest liczbą wymierną. Warunek $A = \frac{1}{\sqrt{n}}$ oznacza więc, że liczba n jest kwadratem liczby całkowitej. Wykażemy, że dla każdego kwadratu żądane rozbicie jest możliwe.

Niech $n = k^2$, wówczas poszukiwanym przez nas rozbiciem jest:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ \ldots\ , \frac{k-1}{k}\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}, \ \ldots\ , \frac{n-1}{n}\right\},$$

gdyż

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ \ldots\ \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \ \ldots\ \cdot \frac{n-1}{n}.$$

4. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 3. Na odcinkach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty E i F, że $AE = AF = 2$. Wyznacz długość cięciwy okręgu opisanego na trójkącie AEF zawartej w prostej BD.

   Rozwiązanie. Oznaczmy tę cięciwę jako XY, przyjmując $BX < BY$. Niech punkt Z będzie środkiem odcinka EF, a punkt T — obrazem punktu Z w symetrii względem prostej BD.

   Zauważmy, że punkt Z jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AEF, jako środek przeciwprostokątnej. Co więcej, trójkąty AEF oraz ABD są prostokątne równoramienne, więc proste EF oraz BD są równoległe. Stąd wynika, że punkty A, Z, T leżą na prostej prostopadłej do prostej BD.

   Środek odcinka ZT leży na prostej BD, z czego wynika, że $AZ = ZT$ i punkt T leży na okręgu opisanym na trójkącie AEF. Zatem mamy równości $ZX = ZT = ZY$, oraz poprzez symetrię $YT = ZY = ZX = XT$.

   W konsekwencji trójkąty ZXT i ZYT są przystającymi trójkątami równobocznymi o boku równym promieniowi okręgu. Cięciwa XY ma długość równą dwukrotności wysokości każdego (dowolnego) z tych trójkątów. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy $AE^2 + AF^2 = EF^2$, czyli $EF = 2\sqrt{2}$, więc promień okręgu wynosi $\sqrt{2}$. Stąd

$$XY = 2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}.$$