# Rozpoznawanie kwadratów

XV Warsztaty Matematyczne I LO im. St. Dubois w Koszalinie
Arkadiusz Męcel
29.09.2021 r.

1. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem.
2. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych $n$ liczba $n(n+3)$ jest kwadratem?
3. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$ liczba $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ jest niewymierna.
4. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite $n$ takie, że liczba $2^n+7^n$ jest kwadratem.
5. Niech $x, y$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wykaż, że liczby $x^2+y+1$ oraz $y^2+4x+3$ nie mogą być jednocześnie kwadratami. Wskazówka: rozważ osobno przypadki $x \geqslant y$ oraz $x < y$.
6. Niech $n$ będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $d$ będzie dodatnim dzielnikiem liczby $2n^2$. Pokaż, że liczba $n^2+d$ nie jest kwadratem.
7. Pomiędzy kolejnymi kwadratami może być zawarta wielokrotność kwadratu (mamy na przykład $5^2 < 2\cdot 4^2 < 6^2$). Pokaż, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite $a, b, c, d$ takie, że $a^2 < bc^2 < bd^2 < (a+1)^2$.
8. Liczby całkowite $a, b$ spełniają, dla pewnego $n$ całkowitego, nierówność $n^2 < a < b < (n+1)^2$. Pokaż, że $ab$ nie jest kwadratem.
9. Niech $S_n$ oznacza sumę pierwszych $n$ liczb pierwszych. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ pomiędzy liczbą $S_n$ a liczbą $S_{n+1}$ znajduje się kwadrat, czyli istnieje liczba całkowita $m$ taka, że $S_n < m^2 < S_{n+1}$.
10. Ciąg $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots$ złożony jest z liczb całkowitych dodatnich, które nie są kwadratami. Pokaż, że $n$-ty wyraz tego ciągu jest równy
$$n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right],$$
gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej $x$, czyli taką liczbę całkowitą $m$, że $m \leqslant x < m+1$.