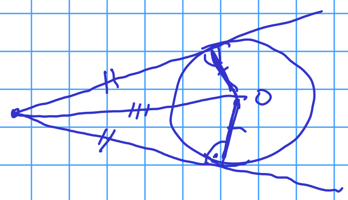
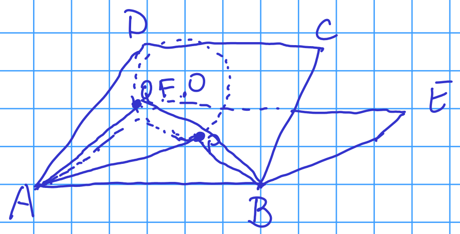
XV Warsztaty Matematyczne
Najmocniejsze twierdzenie stereometrii

Sytuacja płaska:



Sytuacja przestrzenna:



Q – pkt styczności z pł. ABCD

P – –||– –||– ABEF

Tw. „Najmocniejsze twierdzenie stereometrii"

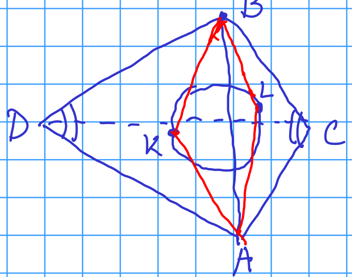
„Przy powyższych założeniach":

① $AP = AQ$ i $BP = BQ$

② Z ① wynika, że $\triangle APB$ i $\triangle AQB$ są przystające (cecha bbb)

Przykład 1 Sfera wpisana w czworościan ABCD jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Pokaż, że jeśli K i L są środkami okręgów opisanych na $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$, odpowiednio, to $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.

Rozw.



Z najmocniejszego tw. stereometrii (NTS)

$\triangle AKB \equiv \triangle ALB$; w szczególności $\overset{(*)}{\measuredangle AKB = \measuredangle ALB}$.

K i L są środkami okr. opisanych na $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ (odpowiednio), więc

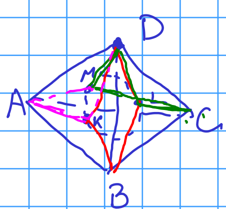
$$\measuredangle ADB = \frac{1}{2}\cdot\measuredangle AKB \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\cdot\measuredangle ALB = \measuredangle ACB$$

∎

Przykład (inny przydatny fakt olimpijski)

Pokaż, że w czworościanie ABCD mamy, że $\measuredangle ADB + \measuredangle BDC > \measuredangle ADC$.

Rozw.



K, L, M – punkty styczności sfery wpisanej w czw. ABCD ze ścianami ABD, BCD, ACD

Z NTS wynika, że $\triangle BKD \equiv BLD$, $\triangle CLD \equiv \triangle CMD$ i $\triangle AKD \equiv \triangle AMD$. W szczególności:

$\measuredangle BDK = \measuredangle BDL$, (i)

$\measuredangle CDL = \measuredangle CDM$, (ii)

$\measuredangle ADM = \measuredangle ADK$. (iii)

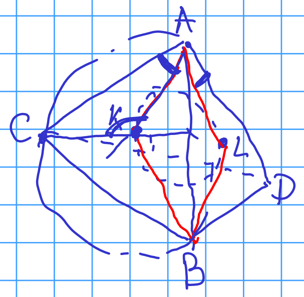
$$\measuredangle ADB + \measuredangle BDC = \overbrace{\measuredangle ADK + \measuredangle BDK}^{\measuredangle ADB} + \overbrace{\measuredangle BDL + \measuredangle CDL}^{\measuredangle BDC} > \underset{(iii)}{\measuredangle ADM} + \underset{(ii)}{\measuredangle CDM} = \measuredangle ADC$$

∎

Przykład Sfera wpisana w czworościan ABCD jest styczna do ścian ABC i ABD w punktach K i L, odpowiednio. Jeśli K i L są punktami przecięcia się wysokości w $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$, odpowiednio, to

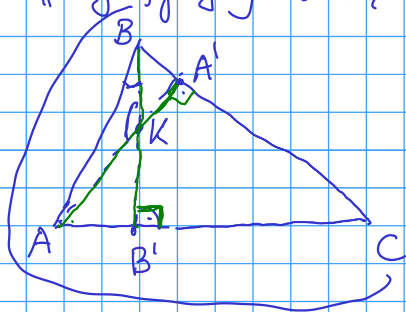
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Rozw.



Z NTS otrzymujemy, że $\triangle AKB \equiv \triangle ALD$; czyli w szczególności $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$. (*)

„Wyciągnijmy" ścianę ABC:



Oczywiście $\sphericalangle KA'C = \sphericalangle KB'C = 90^\circ$, zatem na czworokącie $KB'CA'$ można opisać okrąg. Wówczas $\sphericalangle A'KB' = 180^\circ - \sphericalangle A'CB'$, a wtedy

$\sphericalangle AKB = \sphericalangle A'KB' = 180^\circ - \sphericalangle A'CB' = 180^\circ - \sphericalangle ACB$

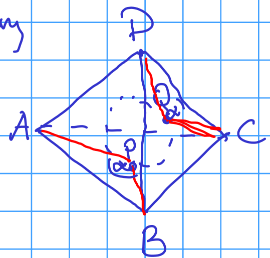
Analogicznie, „wyciągając" ścianę ABD, $\sphericalangle ALB = 180^\circ - \sphericalangle ADB$.

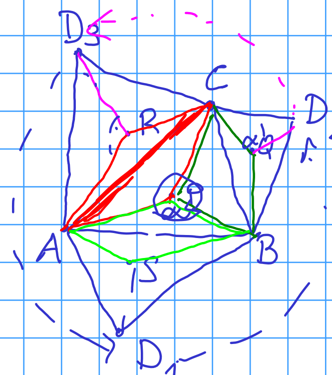
Ale wcześniej wywnioskowaliśmy (*), czyli

$$\left.\begin{array}{c}\underset{180^\circ - \sphericalangle ACB}{\underset{\shortparallel}{\sphericalangle AKB}} = \underset{180^\circ - \sphericalangle ADB}{\underset{\shortparallel}{\sphericalangle ALB}}\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$$

∎

Przykład. W czworościanie ABCP punkt P jest punktem styczności sfery wpisanej w dany czworościan ze ścianą ABC i Q jest punktem styczności tej sfery ze ścianą BCD. Pokaż, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$. (przy poniższych oznaczeniach, chcemy pokazać, że $\alpha = \alpha'$)





R, S – pozostałe pkt styczności rozważanej sfery z czw. ABCD

Z NTS:

$\triangle APB \equiv \triangle ASB$
$\triangle BPC \equiv \triangle BQC$
$\triangle APC \equiv \triangle ARC$
$\triangle CQD \equiv \triangle CRD$
$\triangle ARD \equiv \triangle ASD$
$\triangle BQD \equiv \triangle BSD$

Z tego wynika:

$\sphericalangle APB = \sphericalangle ASB = \alpha$
$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \beta$
$\sphericalangle APC = \sphericalangle ARC = \gamma$
$\sphericalangle CQD = \sphericalangle CRD = \alpha'$
$\sphericalangle BQD = \sphericalangle BSD = \gamma'$
$\sphericalangle ARD = \sphericalangle ASD = \beta'$

Patrzymy na sumy kątów przy wierzchołkach P, Q, R, S:

$$\begin{cases} \gamma + \beta + \alpha = 360^\circ & \leftarrow P \quad (1) \\ \gamma + \alpha' + \beta' = 360^\circ & \leftarrow R \quad (2) \\ \alpha + \beta' + \gamma' = 360^\circ & \leftarrow S \quad (3) \\ \beta + \gamma' + \alpha' = 360^\circ & \leftarrow Q \quad (4) \end{cases}$$

$(2)+(3)+(4)$: $\overbrace{\alpha + \beta + \gamma}^{=(1)=360^\circ} + 2\cdot(\alpha' + \beta' + \gamma') = 3\cdot 360^\circ$

$\Downarrow$

$2\cdot(\alpha' + \beta' + \gamma') = 2\cdot 360^\circ$

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$ (5)

Otrzymana równość wraz z (3) daje, że

$$\alpha + \cancel{\beta'} + \cancel{\gamma'} \overset{3}{=} 360^\circ \overset{5}{=} \alpha' + \cancel{\beta'} + \cancel{\gamma'}$$

$$\alpha = \alpha'$$

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD. \qquad \blacksquare$$