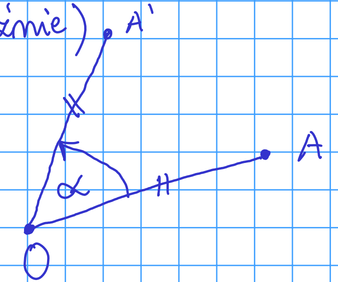
XV Warsztaty Matematyczne – dzień 1.

Obroty. (na płaszczyźnie)

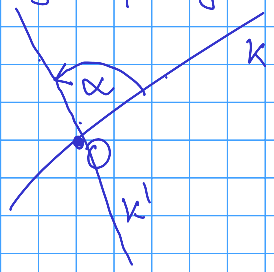


Formalniej: Obrót o środku O i kącie α to przekształcenie płaszczyzny takie, że dla dowolnego punktu A zachodzi $\sphericalangle AOA' = \alpha$, gdzie A' jest obrazem pkt A przy tym obrocie oraz $|OA| = |OA'|$.

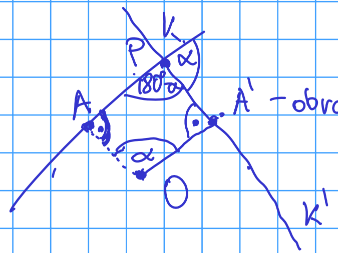
Twierdzenie 1. Obrót jest izometrią (płaszczyzny), tzn. takie jej przekształcenie, które zachowuje długości i kąty (pomiędzy prostymi).

Twierdzenie 2. Dany jest punkt O i prosta k. Niech k' będzie obrazem prostej k przy obrocie wokół punktu O i kącie $0 < \alpha < 180^\circ$. Wówczas jeden z kątów pomiędzy prostymi k i k' jest równy α.

Szkic Dowodu: Jeśli O należy do prostej k, to oczywiste:



Załóżmy, że O nie należy do k. Zrzutujmy prostopadle punkt O na prostą k i ozn. ten rzut przez A.



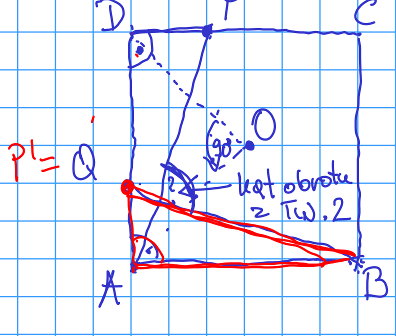
A' – obraz pkt A przy rozważanym obrocie

Fakt, że $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ implikuje, że $k \nparallel k'$, a więc przecinają się w pkt P.

∎

Przykłady: Dany jest kwadrat ABCD. Punkt P leży na boku CD, a punkt Q leży na boku DA, przy czym $DP = AQ$. Pokaż, że $AP \perp BQ$.

Rozw.



Rozważmy obrót wokół pkt O o 90° tak, aby D przeszło na A.

Wówczas: $\left.\begin{array}{l} D \text{ przechodzi na } A \\ A \text{ przechodzi na } B \end{array}\right\} \Rightarrow DA$ przechodzi na AB

Obrót zachowuje kąty oraz $DP = AQ$, zatem DP przechodzi na AQ, a stąd wynika, że $\triangle PDA$ przechodzi na $\triangle QAB$.

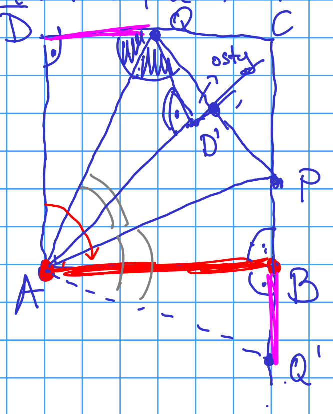
(bo $\left.\begin{array}{l} DA \to AB \\ PD \to AQ \\ \text{kąty są równe} \end{array}\right\}$ więc z cechy kbk $PDA \equiv QAB$)

W szczególności, PA przechodzi na QB. Teza wynika natychmiast z Tw. 2.

∎

Przykład Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $BP + DQ = PQ$. Pokaż, że $\sphericalangle QAP = 45^\circ$.

Rozw.



Rozważmy obrót wokół pkt A o 90° tak, aby D przeszło na B.

Niech Q' będzie obrazem punktu Q przy rozważanym obrocie.

Obrót zachowuje kąty więc $\underbrace{\sphericalangle QDA}_{= 90^\circ} = \sphericalangle Q'BA$

Zauważmy, że DQ przeszło na BQ' oraz

$$PQ' = BP + BQ' = BP + DQ \underset{\text{zał. zadania}}{=} PQ.$$

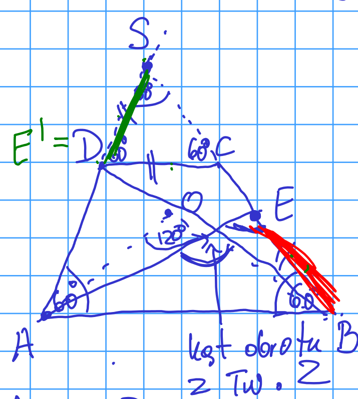
$\underset{=}{\sphericalangle PAQ'} + \sphericalangle PAQ$

Dalej, $\sphericalangle QAQ' = 90^\circ$ (z definicji obrotu).

Z cechy bbb ($AP = AP$, $\underset{\text{to jest powyżej}}{PQ' = PQ}$, $\underset{\text{wynika z obrotu}}{AQ' = AQ}$) mamy, że $\triangle PQA \equiv PQ'A$. A stąd $\sphericalangle PAQ' = \sphericalangle PAQ$. Skoro $\sphericalangle QAQ' = 90^\circ$, to z poprzedniego zdania wynika, że $\sphericalangle PAQ = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. ∎

Przykład Dany jest trapez $ABCD$ (o podstawach AB i CD), w którym $CD < BC$ i $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60^\circ$. Na boku BC wybieramy punkt E taki, że $EB = CD$. Pokaż, że $|BD| = |AE|$ i $\sphericalangle(BD, AE) = 60^\circ$.

Rozw.



S – punkt przecięcia AD z BC

$\triangle ABS$ jest równoboczny. Weźmy punkt O, który jest środkiem $\triangle ABS$.

Rozważmy obrót wokół O o kąt 120° tak, aby A przeszło na B

$A \to B$
$B \to S$

czyli AB przechodzi na BS.

? $E \to D$

Obrót zachowuje kąty, więc skoro przed obrotem $\sphericalangle(AB, BE) = 60^\circ$, to po obrocie $\sphericalangle(\underbrace{BS}_{\text{obraz } AB}, \underbrace{SE'}_{\text{obraz } BE})$ też musi być równy 60°. Zatem E' leży na boku AS. Skoro $BE = CD$ i $\triangle CDS$ jest równoboczny, czyli $CD = DS$, to $E' = D$.

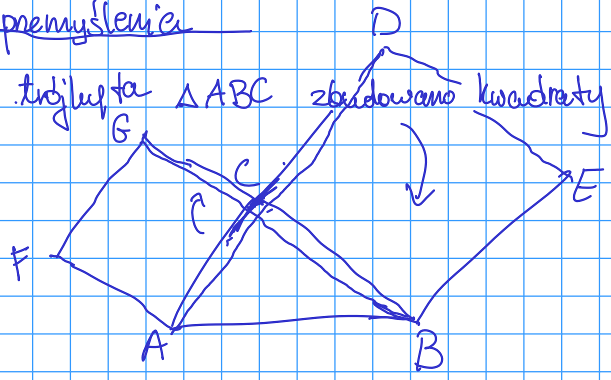
E' – obraz E przy rozw. obrocie

W szczególności, $A \to B$, $\underset{\text{to pokazaliśmy}}{E \to D}$, więc odcinek AE przeszedł na BD, zatem $|AE| = |BD|$.

Dodatkowo, z Tw. 2 wynika, że $\sphericalangle(BD, AE) = 120^\circ$, a zatem drugi z kątów pomiędzy tymi odcinkami jest równy 60°. ∎

Seria zadań do samodzielnego przemyślenia

Zad. 1 Na bokach BC i AC trójkąta ΔABC zbudowano kwadraty BCDE i CAFG. Pokaż, że $AD \perp BG$ i $AD = BG$.

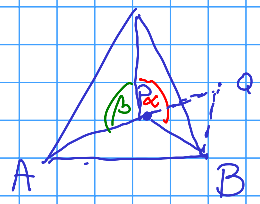


$A \to G$
$D \to B$

Wsk. Obrót wokół C o 90° tak, aby $A \xrightarrow[C]{} G$

Zad. 2 ΔABC – równoboczny

P leży w ΔABC

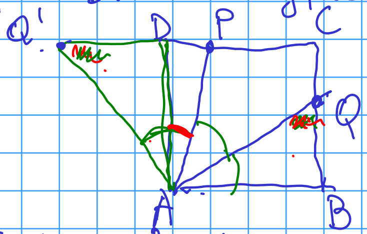


Niech $\measuredangle BPC = \alpha$, $\measuredangle CPA = \beta$

Teza: Z odcinków AP, BP, CP można zbudować trójkąt o bokach $\alpha - 60^\circ$, $\beta - 60^\circ$ i $300^\circ - \alpha - \beta$.

Wsk. Obrót wokół C o kąt 60°, aby $A \to B$

Zad. 3 Dany jest kwadrat ABCD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach CD i CB, przy czym AQ jest dwusieczną PAB. Udowodnij, że $AP = DP + BQ$.



Wsk. Obrót wokół A o 90°, aby B przeszło na D.

$\measuredangle PAQ' = \measuredangle DAQ$

A'PQ – równoramienny