

XV Warsztaty Matematyczne I LO im. St. Dubois w Koszalinie
Grupa starsza, mecz matematyczny. Dzień trzeci

1. Czy istnieje liczba o sumie cyfr równej 123, która jest kwadratem liczby całkowitej?
2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p^2 + 2$ jest liczbą pierwszą.
3. Udowodnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie może być kwadratem.
4. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a, b spełniających równanie

$$a^2 + \text{NWD}(a^2, b^2) = b^2.$$

5. Wykaż, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2 + 1) - n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.
6. Czy pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych można zmieścić dwa różne sześciiany? Innymi słowy, czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, n takie, że $n^2 < a^3 < b^3 < (n + 1)^2$?
7. Podczas porządkowania strychu, Zbyszek znalazł stary kalkulator, który potrafi obliczać pierwiastki kwadratowe, jednak jego wyświetlacz pokazuje tylko dwie cyfry po przecinku. Przykładowo, dla $\sqrt{4}$ urządzenie pokaże 2.00, a dla $\sqrt{6} = 2,44949\dots$ będzie to 2.44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, nie będąca kwadratem liczby całkowitej, której pierwiastek kalkulator Zbyszka wyświetli z dwoma zerami po przecinku?
8. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że suma dzielników dodatnich liczby p^4 jest kwadratem.

Zasady meczu:

- Każdy zespół rozwiązuje zadania tego samego zestawu, który w danym dniu jest opublikowany na Zoomie ok. godziny 10:30. Uczestnicy przebywają w tym czasie w pokojach wydzielonych ze spotkania wykładowego (tzw. breaking room).
- Około godziny 12:00 każdy zespół może zwrócić się do prowadzącego zajęcia w danym dniu o wskazówki do rozwiązania trzech wybranych zadań z opublikowanego zestawu.
- O godzinie 14:00 rozpoczyna się omówienie zadań w formie meczu matematycznego między wyznaczonymi zespołami. Pierwszy zespół i pierwsze zadanie wyznacza prowadzący — może to być jakaś forma losowania.
- Kolejny zespół i numer zadania do omówienia wyznacza zespół, który omawiał zadanie jako ostatni (w przypadku dwóch zespołów kolejne zadania zespoły omawiają naprzemiennie), przy czym wskazywać można jedynie zespoły z minimalną liczbą podejść do rozwiązania. Do rozwiązywania zadań można delegować jedynie osoby z minimalną liczbą prezentacji rozwiązań.
- Rozwiązania zadań oceniane są przez prowadzącego w skali olimpijskiej (0-2-5-6 pkt.).
- Na zakończenie meczu każdy uczestnik zespołu otrzymuje tyle punktów danego dnia, ile uzyskał jego zespół w trakcie omawiania zadań.
- Zadania, które podczas omówienia nie zostały rozwiązane poprawnie, omawia prowadzący zajęcia. Do omówienia zadania może zgłosić się zespół wywołujący to zadanie i jest oceniany w skali olimpijskiej. Skutkuje to możliwością uzyskania dodatkowych punktów przez ten zespół. Jeśli jednak rozwiązanie przedstawione jest błędne, to wtedy zespołowi odejmuje 6 punktów od liczby zdobytych przez nich punktów wcześniej.