

**KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień trzeci.**

Każde zadanie należy umieścić na OSOBNEJ, PODPISANEJ kartce.

1. Okręgi  $\omega_1$  i  $\omega_2$  o środkach odpowiednio  $O_1$  i  $O_2$  przecinają się w dwóch różnych punktach  $A$  i  $B$ , przy czym  $\angle O_1AO_2 > 90^\circ$ . Prosta  $O_1B$  przecina okrąg  $\omega_2$  w punkcie  $C \neq B$ , a prosta  $O_2B$  przecina okrąg  $\omega_1$  w punkcie  $D \neq B$ . Wykaż, że punkt  $B$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ACD$ .
2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze  $p$ , które można zapisać w postaci sumy  $p = a^2 + b^2$  ( $a, b \geq 1$  całkowite) tak, aby liczba  $2ab$  była kwadratem liczby całkowitej.
3. Pokaż, że wśród liczb  $1, 11, 111, \dots, \underbrace{1 \dots 1}_{2021}$  jest liczba podzielna przez 2021.