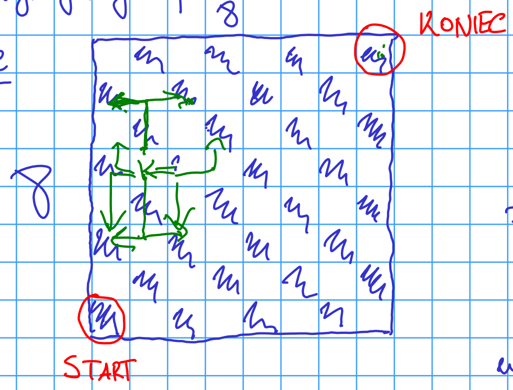
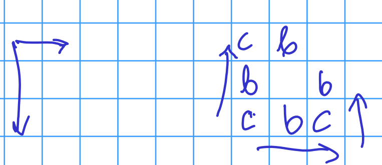
Przykład Mamy planszę 8 na 8. Czy możliwe jest przejście jej koniem szachowym w taki sposób, aby każde pole szachownicy zostało odwiedzone dokładnie jeden raz, wiedząc, że zaczynamy w lewym dolnym polu, a kończymy w prawym górnym polu?

Rozwiązanie



Z pokolorowanej szachownicy widzimy, że pole startowe jak i końcowe są tego samego koloru. Zauważmy, że przy wykonaniu ruchu koń przechodzi z pola białego (czarnego) na czarny. W szczególności, przy nieparzystej liczbie ruchów koń zmienia kolor pola na przeciwny w stosunku do koloru pola, na którym stoi. Skoro mamy przejść ca-



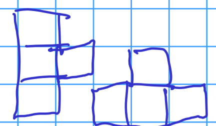
$c \xrightarrow{1} b \xrightarrow{2} c \xrightarrow{3} b \xrightarrow{4} c \xrightarrow{5} b$

(Analogicznie, gdybyśmy wychodzili z pola białego).

cykl dł. 2

Tą szachownicę, odwiedzając każde jej pole dokł. 1 raz, musimy zrobić 63 ruchem koniem. Zauważmy, że otrzymujemy sprzeczność: z jednej strony koń wychodząc z pola czarnego (założenie) kończy swoją drogę w prawym górnym, czyli czarnym, polu, a z drugiej strony koń robi 63 ruchy (nieparzysta), więc wychodząc z czarnego pola koń skończy wędrówkę w polu białym (patrz powyższe obserwacje).

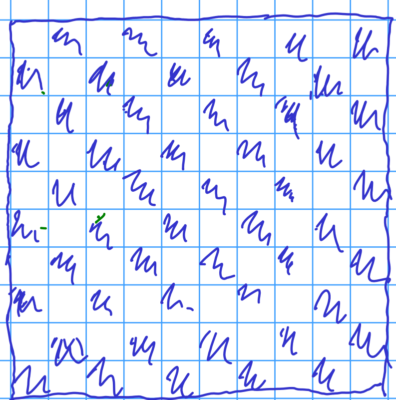
Odp.: Nie można przejść koniem w żądany sposób.

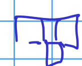


Przykład 2. Czy szachownicę (kwadrat) 10×10 można pokryć klockami tetramina  ?

(Ogólnie w tych zadaniach: 1) Klocki nie mogą na siebie nachodzić 2) Klocki można ustawiać z dokł. do obrotu o 90°.)

Rozwiązanie



Przypuśćmy, że kwadrat dała się pokryć klockami . Zauważmy, że:

1) Jeśli szachownica jest w pełni pokryta tymi klockami to ich na planszy jest $\frac{100 \text{ pól szachownicy}}{4 \text{ pola } 1 \text{ klocka}} = 25$

2) Jeden klocek zajmuje 1 lub 3 pola kolorowe.
(jeśli środek pokolorowany, to sąsiedzi nie
—||— (niepokolorowany), —||— tak)

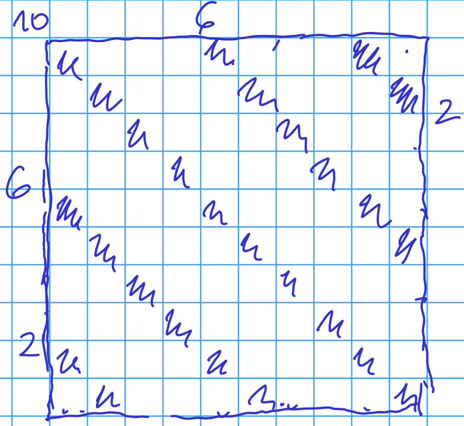
W szczególności, klocek zajmuje nieparzystą liczbę kolorowych pól. Wówczas 25 klocków zajmuje razem też nieparzystą liczbę kolorowych pól. Ale kolorowych pól jest 50, czyli liczba parzysta. Sprzeczność.

$\boxtimes$

Przykład 3 Czy kwadrat 10×10 można pokryć klockami 1×4? (▭▭▭▭)

Rozw.

Sposób 1



Przypuśćmy, że kwadrat da pokryć się klockami ▭▭▭▭

Zauważmy, że każdy klocek zajmuje dokładnie 1 pole kolorowe. Jeśli te klocki pokrywają kwadrat, to ich jest $\frac{100}{4} = 25$. Zatem klocki te zajmują razem 25 kolorowych pól.

Pól kolorowych jest zaś więcej: 26.

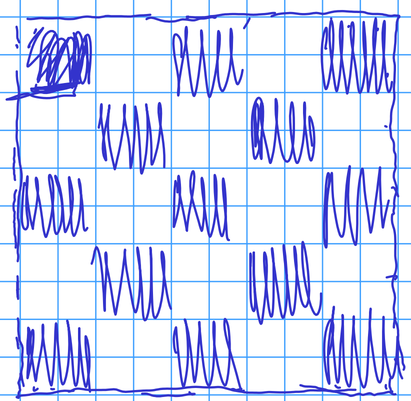
$25 \neq 26$

Sprzeczność.

Odp.: Nie da się pokryć kwadratu 10×10 klockami 1×4.

$\boxtimes$

Sposób 2.



Przypuśćmy, że kwadrat da pokryć się klockami ▭▭▭▭

Każdy klocek zajmuje 2 pola kolorowe

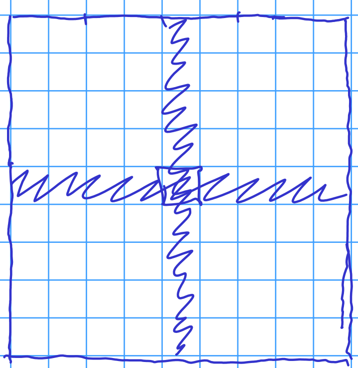
Tych klocków jest 25 (patrz sposób 1)

Czyli razem zajmują 50 kolorowych pól.

Kolorowych pól szachownicy jest jednak 52.

Przykład 4 Dana jest szachownica 9×9. Czy da się ją pokryć klockami 1×5 oraz 1×6?

Rozw.



Przypuśćmy, że kwadrat ten da się pokryć żądanymi klockami.

Zauważmy, że:

0) każdy klocek zawiera co najmniej 1 kolorowe

1) każdy klocek, który nie zajmuje pola centralnego, zawiera dokł. 1 kolorowe pole

2) Jeśli klocek zawiera pole centralne, to on leży w całości na pokolorowanym polu, czyli zajmuje co najmniej 5 pól kolorowych

Zatem maksymalna liczba klocków jest równa $17 - 5 + \underbrace{1}_{\text{maksymalnie}} = 13$. Zatem zajmą one co najwyżej $13 \cdot 6 = 78$. Liczba pól tego kwadratu to jednak 81.

(liczba wszystkich kolorowych pól)

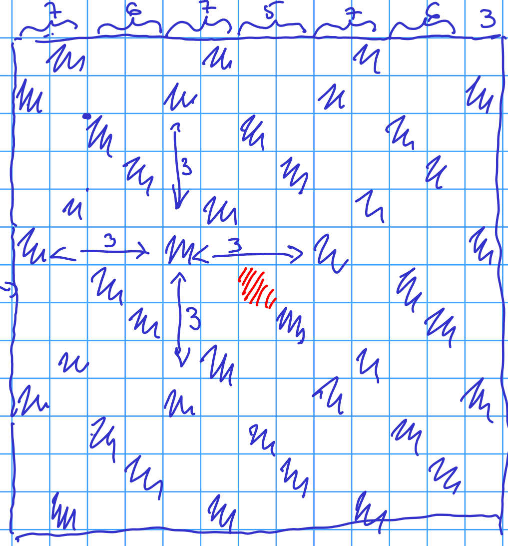
$78 \neq 81$.

Sprzeczność.

$\boxtimes$

Przykład 5 Czy można pokryć szachownicę 13×13 klockami 1×4 tak, aby jedynie środkowe pole nie było zakryte?

Przypuśćmy, że się da pokryć tę szachownicę w żądany sposób.



Zauważmy, że każdy klocek 1×4 zakrywa dokładnie 1 kolorowe pole.

Tych klocków, skoro da się pokryć szachownicę bez środka, jest $\frac{169-1}{4} = 42$.

Kolorowych pól jest 41.

$41 \neq 42$

Zadania do samodzielnego przemyślenia

(1) Czy kwadrat 13×13 można pokryć klockami o wymiarach 2×2 lub 3×3?

Wsk. Pokolorować na przemian pierwsze 12 kolumn prostokątami $1\times\frac{3}{2}$, a 12 kolumnę – standardowo, tzn. „standardowo" na przemian kwadratami 1×1. Następnie zauważyć, że każdy klocek zawiera część kolorową o tym samym, co część biała w tym klocku. To by oznaczało, że pole części białej (84) to części kolorowej (85), czyli sprzeczność.

(2) Wyznacz wszystkie $n\in\mathbb{N}$ takie, że w kwadracie $n\times n$ można umieścić nie nachodzące klocki 1×4 w taki sposób, aby zajęte były wszystkie pola nie leżące przy brzegu (tzn. należy wypełnić szczelnie leżący centralnie kwadrat $n-2\times n-2$, a klocki mogą wystawać 1 pole za ten kwadrat).

Wsk.
1) $4|n$ — $n\times n$ zapełnić szczelnie
2) $n=4k+1$ — narożny $n-1\times n-1$ zapełnić szczelnie
3) $n=4k+2$ — centralny $n-2\times n-2$ 〃
4) $n=4k+3$ – nie da się – pokolorować standardowo centralny kwadrat $n-1\times n-1$ i otrzymać sprzeczność.

(1×4 zajmuje dokł. 2 pola kolorowe, więc wszystkie – parzystą liczbę tych pól. Kwadrat $n-1\times n-1$ ma jednak $\underbrace{\frac{n-1}{2}}_{2k+1}\cdot\frac{n-1}{2}$ kolorowych pól) – liczba nieparzysta.