Zasada ekstremum

XV Warsztaty Matematyczne I LO im. St. Dubois w Koszalinie
Arkadiusz Męcel
28.09.2021 r.

1. Na płaszczyźnie pokolorowano skończenie wiele punktów: część na biało, a część na czarno, przy czym wiadomo, że każdy odcinek łączący dwa punkty tego samego koloru zawiera punkt innego koloru. Pokazać, że wszystkie pokolorowane punkty leżą na jednej prostej.

2. Pokaż, że jeśli zbiór złożony z n punktów na płaszczyźnie nie jest zawarty w jednej prostej, to istnieje pewna prosta, która przechodzi tylko przez dwa punkty z tego zbioru.

3. Pokaż, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.

4. Pokaż, że nie istnieje czwórka dodatnich liczb całkowitych (x, y, z, u) spełniających równanie:
$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

5. Każda droga w Księstwie Kierunków jest jednokierunkowa. Każda para miast tego Księstwa połączona jest dokładnie jedną drogą. Pokaż, że istnieje miasto, do którego można dotrzeć z każdego miasta bezpośrednio lub za pomocą co najwyżej jednego miasta.

6. Rozważmy układ skończenie wielu punktów na płaszczyźnie o tej własności, że pole dowolnego trójkąta o wierzchołkach z tego układu ma pole nie większe od 1. Wykaż, że wszystkie te punkty leżą wewnątrz trójkąta o polu mniejszym niż 4.

7. Na płaszczyźnie jest n punktów. Pokaż, że układ punktów złożony ze środków wybranych n odcinków zawiera co najmniej $2n - 3$ parami różnych punktów.

8. Na każdym z 256 pól szachownicy 16×16 wpisano jedną z liczb $1, 2, \ldots, 256$ (w każdym polu wpisano inną liczbę). Pokazać, że istnieją dwa sąsiadujące ze sobą (wystarczy wspólny wierzchołek) pola szachownicy, które zawierają liczby o różnicy równej co najmniej 17.

9. Pokaż, że wśród dowolnych 15 względnie pierwszych liczb całkowitych z przedziału $[2, 1992]$ co najmniej jedna z liczb jest pierwsza.

10. Znajdź wszystkie liczby dodatnie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 takie, że
$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$