XV Warsztaty Matematyczne I LO im. St. Dubois w Koszalinie
Grupa młodsza, mecz matematyczny. Dzień drugi

1. Na płaszczyźnie dany jest zbiór n punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że można wśród nich znaleźć trzy takie, że przeprowadzony przez nie okrąg nie zawiera we wnętrzu innych punktów tego zbioru.
2. Pokaż, że wśród przekątnych dowolnego pieciokąta wypukłego można wskazać takie trzy, które są bokami pewnego trójkąta.
3. Czy istnieje liczba naturalna o sumie cyfr mniejszej niż n, podzielna przez liczbę $\underbrace{11\ldots1}_{n}$?
4. Każdy punkt kratowy płaszczyzny oznaczono pewną liczbą całkowitą dodatnią, przy czym liczba wpisana w dany punkt jest średnią arytmetyczną liczb wpisanych w cztery „sąsiednie" (z góry, z dołu, z prawej i lewej) punkty kratowe. Pokaż, że wszystkie punkty kratowe musza być oznaczone tą samą liczbą.
5. Po torze kołowym porusza się n identycznych samochodów. Łącznie mają one tyle benzyny, by przejechać całe kółko. Pokaż, że jeden z nich może przejechać kółko zbierając po drodze benzynę od innych samochodów.
6. Sześć okręgów ma punkt wspólny A. Pokaż, że jeden z tych okręgów ogranicza koło zawierające środek innego z tych sześciu okręgów.
7. Pokaż, że każdy wielokąt wypukły zawarty o polu równym 1 zawarty jest w prostokącie o polu 2.
8. Na płaszczyźnie jest n punktów. Pokaż, że układ punktów złożony ze środków wybranych n odcinków zawiera co najmniej $2n - 3$ parami różnych punktów.
9. Na każdym z 256 pól szachownicy 16×16 wpisano jedną z liczb $1, 2, \ldots, 256$ (w każdym polu wpisano inną liczbę). Pokazać, że istnieją dwa sąsiadujące ze sobą (wystarczy wspólny wierzchołek) pola szachownicy, które zawierają liczby o różnicy równej co najmniej 17.
10. W talii mamy n kart ponumerowanych liczbami od 1 do n. Tasujemy talię (bierze dowolny porządek kart), a następnie powtarzamy następującą procedurę: jeśli karta na wierzchu talii ma numer k, to odwracamy kolejność pierwszych k kart w talii. Pokaż, że po pewnej liczbie tych operacji na wierzch talii trafi liczba 1 (i dalsze operacje nie zmienią układu kart). Dla przykładu: jeśli $n = 6$ oraz wyjściowy układ kart (od góry) to 362154, to kolejne operacje:

$$362154 \to 263154 \to 623154 \to 451326 \to 315426 \to 513426 \to 243156 \to 423156 \to 132456.$$

Zasady meczu:

- Każdy zespół rozwiązuje zadania tego samego zestawu, który w danym dniu jest opublikowany na Zoomie ok. godziny 10:30. Uczestnicy przebywają w tym czasie w pokojach wydzielonych ze spotkania wykładowego (tzw. breaking room).
- Około godziny 12:00 każdy zespół może zwrócić się do prowadzącego zajęcia w danym dniu o wskazówki do rozwiązania trzech wybranych zadań z opublikowanego zestawu.
- O godzinie 14:00 rozpoczyna się omówienie zadań w formie meczu matematycznego między wyznaczonymi zespołami. Pierwszy zespół i pierwsze zadanie wyznacza prowadzący — może to być jakaś forma losowania.
- Kolejny zespół i numer zadania do omówienia wyznacza zespół, który omawiał zadanie jako ostatni (w przypadku dwóch zespołów kolejne zadania zespoły omawiają naprzemiennie), przy czym wskazywać można jedynie zespoły z minimalną liczbą podejść do rozwiązania. Do rozwiązywania zadań można delegować jedynie osoby z minimalną liczbą prezentacji rozwiązań.
- Rozwiązania zadań oceniane są przez prowadzącego w skali olimpijskiej (0-2-5-6 pkt.).
- Na zakończenie meczu każdy uczestnik zespołu otrzymuje tyle punktów danego dnia, ile uzyskał jego zespół w trakcie omawiania zadań.
- Zadania, które podczas omówienia nie zostały rozwiązane poprawnie, omawia prowadzący zajęcia. Do omówienia zadania może zgłosić się zespół wywołujący to zadanie i jest oceniany w skali olimpijskiej. Skutkuje to możliwością uzyskania dodatkowych punktów przez ten zespół. Jeśli jednak rozwiązanie przedstawione jest błędne, to wtedy zespołowi odejmuje 6 punktów od liczby zdobytych przez nich punktów wcześniej.

.