**XV Warsztaty Matematyczne I LO im. St. Dubois w Koszalinie**
**Grupa młodsza, mecz matematyczny. Dzień pierwszy**

1. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Pokazać, że pewna przekątna ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

2. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Dowieść, że istnieją wówczas dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.

3. W wierzchołkach siedmiokąta foremnego ustawiono pionki czerwone albo niebieskie – po jednym w każdym wierzchołku. Uzasadnić, że niezależnie od sposobu rozmieszczenia pionków istnieją trzy wierzchołki z pionkami tego samego koloru takie, które są jednocześnie wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

4. Uzasadnić, że wśród dowolnych 10 liczb naturalnych istnieją takie, których suma dzieli się przez 10.

5. Danych jest 5 punktów kratowych (o obu współrzędnych całkowitych) na płaszczyźnie. Wykazać, że spośród nich da się wybrać takie dwa punkty, że środek odcinka o końcach w tych punktach jest punktem kratowym.

6. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$ wybieramy takie 51 liczb, że suma żadnych dwóch z nich nie daje 100. Pokaż, że zbiór ten zawiera kwadrat liczby całkowitej.

7. W każde pole szachownicy $10 \times 10$ wpisano dodatnią liczbę całkowitą nie większą niż 10. Polami sąsiadującymi nazwiemy pola, które mają wspólny bok lub wierzchołek. Liczby z sąsiadujących pól są względnie pierwsze. Udowodnić, że pewne liczba została napisana przynajmniej 17 razy.

8. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

9. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Wykazać, że istnieją takie liczby $x_1, \ldots, x_{11}$, nie wszystkie równe 0, z których każda jest równa $-1, 0$ lub 1 oraz liczba $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_{11}a_{11}$ jest podzielna przez 1989.

10. Prostokąt o wymiarach $3 \times 7$ podzielono na 21 kwadratów. Każdy z tych kwadratów pomalowano na biało lub szaro. Udowodnić, że istnieje prostokąt, którego boki zawierają się w liniach podziału, a cztery narożne pola są tego samego koloru.

Zasady meczu:

- Każdy zespół rozwiązuje zadania tego samego zestawu, który w danym dniu jest opublikowany na Zoomie ok. godziny 10:30. Uczestnicy przebywają w tym czasie w pokojach wydzielonych ze spotkania wykładowego (tzw. breaking room).

- Około godziny 12:00 każdy zespół może zwrócić się do prowadzącego zajęcia w danym dniu o wskazówki do rozwiązania trzech wybranych zadań z opublikowanego zestawu.

- O godzinie 14:00 rozpoczyna się omówienie zadań w formie meczu matematycznego między wyznaczonymi zespołami. Pierwszy zespół i pierwsze zadanie wyznacza prowadzący — może to być jakaś forma losowania.

- Kolejny zespół i numer zadania do omówienia wyznacza zespół, który omawiał zadanie jako ostatni (w przypadku dwóch zespołów kolejne zadania zespoły omawiają naprzemiennie), przy czym wskazywać można jedynie zespoły z minimalną liczbą podejść do rozwiązania. Do rozwiązywania zadań można delegować jedynie osoby z minimalną liczbą prezentacji rozwiązań.

- Rozwiązania zadań oceniane są przez prowadzącego w skali olimpijskiej (0-2-5-6 pkt.).

- Na zakończenie meczu każdy uczestnik zespołu otrzymuje tyle punktów danego dnia, ile uzyskał jego zespół w trakcie omawiania zadań.

- Jeśli zespół wywołany nie rozwiąże zadania, rozwiązanie przedstawia zespół wywołujący. Jeśli rozwiązanie zespołu wywołującego nie jest prawidłowe, to wtedy zespołowi odejmuje się 6 punktów od liczby zdobytych przez nich punktów wcześniej.

.