KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień pierwszy[1]

1. Trzech panów posadzono na krzesłach jednego za drugim. Trzeci widzi dwóch przed sobą, a drugi jednego. Spośród pięciu kapeluszy (3 czerwone, 2 białe) założono każdemu jeden, ale żaden z nich nie wie, jaki jego kapelusz ma kolor, natomiast widzi jakie kapelusze mają panowie siedzący przed nim. Na pytanie: *jaki kapelusz masz na głowie*, trzeci mówi – *nie wiem*, drugi – *nie wiem*, a pierwszy, po tamtych odpowiedziach, podaje prawidłowy kolor swojego kapelusza. Jaki to kolor, i dlaczego?

   Rozwiązanie. Skoro trzeci pan nie wie jaki ma kapelusz, to dwóch siedzących przed nim panów nie może mieć białego kapelusza (trzeci musiałby mieć wtedy kapelusz czerwony). Drugi pan wie zatem, że on i pierwszy pan mają albo różnego koloru kapelusze, albo kapelusze czerwone. Gdyby zobaczył u pierwszego kapelusz biały, to wiedziałby, że sam ma kapelusz czerwony. Skoro widząc kapelusz pierwszego pana nie wie jaki ma kapelusz, to oznacza, że pierwszy pan ma kapelusz czerwony.

2. Liczbę czterocyfrową n pomnożono przez 9, w wyniku czego otrzymano liczbę czterocyfrową zapisaną za pomocą tych samych cyfr w odwrotnej kolejności. Wyznacz n.

   Rozwiązanie. Niech

   $$n = 1000a + 100b + 10c + d, \quad 9n = 1000d + 100c + 10b + a$$

   gdzie a, b, c, d są cyframi. Zauważmy, że $n \leqslant 1111$. W przeciwnym bowiem razie $9n$ jest liczbą pięciocyfrową. W szczególności $a = 1$. Stąd $d = 9$. Mamy zatem:

   $$9n = 9 \cdot \overline{1bc9} = 9(1000 + 100b + 10c + 9) = 9000 + 100c + 10b + 1 = \overline{9cb1},$$

   co daje

   $$900b + 90c = 100c + 80 + 10b,$$

   a dalej:

   $$890b + 80 = 10c.$$

   Jeśli $b \neq 0$, to powyższa równość nie zachodzi dla żadnej cyfry c. A zatem $b = 0$ i stąd łątwo dostajemy $c = 8$. Teraz bezpośrednio sprawdzamy, że $9 \cdot 1089 = 9801$.

3. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby

   $$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

   są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

   Rozwiązanie. Możemy przyjąć, że $a \leqslant b \leqslant c$, bowiem rola tych liczb jest symetryczna. Zauważmy też, że żadna z nich nie jest równa 0. Gdyby liczby te nie były tego samego znaku, to musiałby zachodzić jeden z dwóch przypadków:

   - $a < 0, b < 0, c > 0$
   - $a < 0, b > 0, c > 0$.

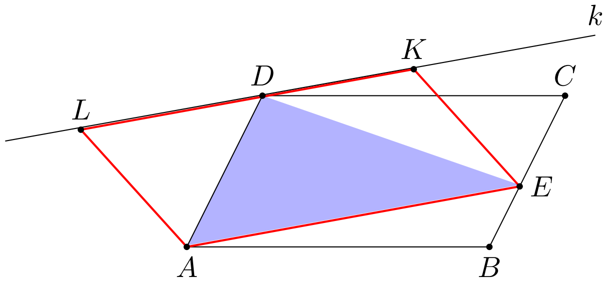
   W pierwszym jednak przypadku, liczba $ca + ab = a(c + b)$ jest iloczynem liczby ujemnej oraz sumy liczb dodatnich. Jest to zatem liczba ujemna, wbrew założeniu. W drugim natomiast przypadku, liczba $bc + ca = c(b + a)$ jest iloczynem liczby dodatniej oraz sumy dwóch liczb ujemnych, a zatem ponownie jest – wbrew założeniu – liczbą ujemną. Widzimy zatem, że rzeczywiscie liczby a, b, c muszą być tego samego znaku.

[1] Sporo zadań oraz rozwiązań pochodzi z książki *Koło matematyczne w gimnazjum*, wydawnictwa Aksjomat.

4. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że $[ABCD] = [AEKL]$.

   Uwaga: $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

   Rozwiązanie. Zauważmy, że niezależnie od wyboru punktów K, L na prostej k pole równoległoboku $AEKL$ równe jest długości podstawy AE oraz odległości prostej AE oraz prostej k. Możemy zatem zakładać, że punkt D leży pomiędzy wierzchołkami K, L, jak na rysunku poniżej.



   Rozważmy trójkąt AED. Jego pole jest równe połowie pola równoległoboku $AEKL$, ponieważ podobnie jak ten równoległobok, trójkąt AED ma podstawę AE oraz wysokość równą ogdległości (równoległych) prostych AE oraz K. Z drugiej strony, $[AED] = [ABD]$, ponieważ trójkąty AED oraz ABD mają wspólną podstawę oraz wysokość (odległość pomiędzy prostymi AD oraz BC. Oczywiście $[ABC] = \frac{1}{2}]ABCD$, a zatem pole trójkąta AED równe jest zarówno połowie $[ABCD]$, jak i połowie $[AEKL]$.

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień drugi.

1. Która z liczb jest większa $3^{100} - 2^{150}$ czy $3^{50} + 2^{75}$?

   Rozwiązanie. Wiadomo, że

$$3^{100} - 2^{150} = \left(3^{50}\right)^2 - \left(2^{75}\right)^2 = (3^{50} - 2^{75})(3^{50} + 2^{75}).$$

   Wystarczy zatem stwierdzić, że $3^{50} - 2^{75} > 1$. Widać to natychmiast po zamianie postaw

$$3^{50} - 2^{75} = 9^{25} - 8^{25}.$$

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite n takie, że

$$\frac{5n+2}{2n+3}$$

   jest liczbą całkowitą.

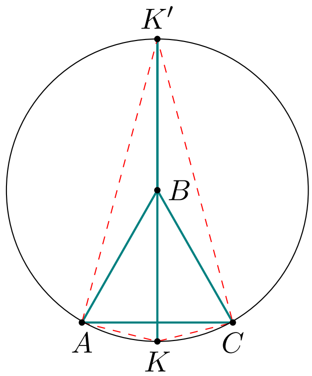
   Rozwiązanie. Zapiszmy odpowiednio dwukrotność ułamka rozważanego w zadaniu:

$$\frac{10n+4}{2n+3} = \frac{10n+15-11}{2n+3} = 5 - \frac{11}{2n+3}.$$

   Widzimy, że powyższa różnica jest liczbą całkowitą tylko, gdy liczba $2n+3$ równa jest ± 1 lub ± 11, a więc dla $n = -7, -2, -1, 4$. Podstawiając te liczby do wyjściowego ułamka widzimy, że są to jedyne wartości, dla których przyjmuje on wartość całkowitą.

3. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono wysokość BD i na przedłużeniu tej wysokości odłożono punkt K taki, że $BK = AC$. Punkt K połączono z punktami A i C. Jaką miarę ma kąt AKC?

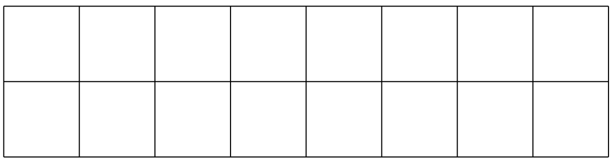
Rozwiązanie. Zauważmy, że punkt K leży na okręgu o środku w punkcie B i promieniu równym długości boków trójkąta ABC. Przedłużenie wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z punktu B przecina ten okrąg w dwóch punktach, które oznaczyliśmy jako K oraz K'.



Zauważmy, że również punkty A, C leżą na wspomnianym okręgu. Oznacza to, że $\measuredangle AK'C$ jest kątem wpisanym opartym na łuku AC. Kątem środkowym opartym na tym łuku jest $\measuredangle ABC$, czyli kąt o mierze $60°$. A zatem $\measuredangle AK'C = 30°$. Skoro czworokąt $AKCK'$ jest wpisany w okrąg i kąty AKC oraz $AK'C$ są przeciwległe, to $\measuredangle AKC = 180° - 30° = 150°$.

4. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Uzasadnij, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt, którego wierzchołki są tego samego koloru.

Rozwiązanie. Rozważmy układ 3 równoległych prostych, które przecina układ 9 prostopadłych do nich prostych równoległych, jak na rysunku poniżej.



Proste te wyznaczają układ 27 punktów przecięcia. Twierdzimy, że pewne cztery z nich, będące wierzchołkami prostokąta, są jednocześnie tego samgo koloru. Zauważmy, że dla każdej pionowej prostej trzy znajdujące się na niej punkty przecięcia (z prostymi poziomymi) mozna pomalować jedynie na osiem różnych sposobów, patrząc kolejno „od góry". Rzeczywiscie, każdy z trzech punktów można niezależnie pomalować na jeden z dwóch kolorów, a więc jest 8 możliwych konfiguracji. Oznacza to, że kolorowanie trzech punktów na ostatniej, dziewiątej prostej, jest takie same, jak kolorowanie trzech punktów przecięcia na jednej z poprzednich 8 pionowych prostych. Skoro zaś z trzech punktów przecięcia na pionowej prostej dwa są w tym samym kolorze – te dwa punkty oraz odpowiadające im punkty na prostej o tym samym kolorowaniu tworzą wierzchołki szukanego prostokąta.

KONKURS ZADANIOWY – grupa młodsza. Dzień trzeci.

1. W kratki tablicy 4×4 wpisano 6 jedynek. Czy niezależnie od rozmieszczenia tych jedynek, można skreślić dwa wiersze i dwie kolumny pozostawiając puste kratki?

   ROZWIĄZANIE. Odpowiedz brzmi: tak. Tablica ma 4 wiersze, a jedynek jest 6. Mamy zatem przypadki:w jednym wierszu są trzy lub cztery jedynki lun w dwóch wierszach są po dwie jedynki. W obu przypadkach skreślamy te wiersze, w których jest więcej niż jedna jedynka. W pierwszym przypadku może tej dojść skreślenie wiersza z jedną jedynką. Pozostają do skreślenia maksymalnie dwie jedynki, skreślamy więc kolumny, w których wystepują.

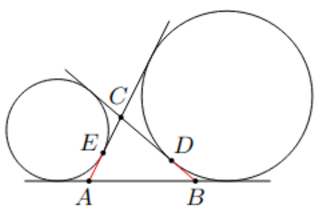
2. Uzasadnij, że:
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}.$$

   ROZWIĄZANIE. Zauważmy, że dla naturalnego $n > 1$ mamy:
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}.$$
   W szczególności mamy $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. Zauważmy również, że dla każdego naturalnego $n > 1$ mamy:
$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
   A zatem
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{99}{100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

3. Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy piękną, jeśli można przedstawić w postaci iloczynu dwóch różnych liczb pierwszych. Wyznacz największą liczbę całkowitą n taką, że istnieje n kolejnych dodatnich liczb całkowitych takich, że każda z nich jest piękna.

   ROZWIĄZANIE. Zauważmy, że każda liczba podzielna przez 4 nie jest piękna, bowiem w jej rozkładzie na cynniki pierwsze występują dwie takie same liczby pierwsze. A zatem $n \leqslant 3$. Zauważmy też, że liczby $33 = 3 \cdot 11, 34 = 2 \cdot 17, 35 = 5 \cdot 7$ są piękne. A zatem $n = 3$.

4. Okrąg o_1 jest styczny do przedłużeń boków AB i BC oraz do boku AC w punkcie E, zaś okrąg o_2 jest styczny do przedłużeń boków AB i AC oraz do boku BC w punkcie D – patrz rysunek poniżej. Pokaż, że $|BD| = |AE|$.



   ROZWIĄZANIE. Niech E' oraz D' będą punktami styczności okręgów o_1 oraz o_2 z prostą AB. Zgodnie z twierdzeniem z wykładu $AE = AE'$ oraz $BD = BD'$. Co więcej wiadomo, że odległości AD' oraz BE' są równe połowie obwodu trójkąta ABC. Stąd $AE = BD$.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień pierwszy.

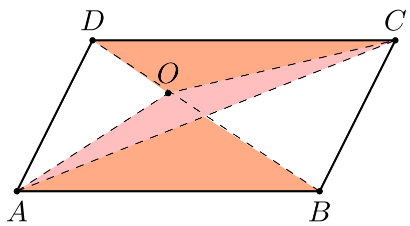
1. Czy istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniające równanie:
$$(x+y)(y+z)(z+x) = 340?$$

Rozwiązanie. Takie liczby nie istnieją. W przeciwnym razie $x+y, y+z, z+x$ byłyby dzielnikami liczby 340. Jakie by to mogły dzielniki? Zauważmy, że jeśli dowolne dwie z liczb $x+y, y+z, x+z$ są parzyste, to również trzecia jest parzysta, na przykład jesli parzyste są $x+y$ oraz $x+z$, to liczba $(x+y)-(x+z)+2z = y+z$ jest parzysta jako suma trzech liczb parzystych. Gdyby jednak wszystkie liczby $x+y, y+z, z+x$ były parzyste, wówczas 340 byłoby podzielne przez 8, co jest niemożliwe. A zatem dokładnie jedna z nich jest parzysta.

Mamy $340 = 4 \cdot 5 \cdot 17$, Mamy też $x, y, z > 0$, więc jedna z rozważanych sum jest równa 4, druga 5, a trzecia 17. To jest jednak niemożliwe, bo jeśli np. $x+y=4$, $y+z=5$ oraz $z+x=17$, to $x<4, y<5$ oraz $x+z<17$. Ogólnie dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c liczby $a+b, a+c, b+c$ są długościami boków trójkąta (spełniają nierówność trójkąta).

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt O leży na przekątnej BD i wewnątrz trójkąta ACD. Pokaż, że $[OAB] = [OAC] + [OAD]$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że po dodatniu do stron równości $[OAB] = [OAC] + [OAD]$ liczby $[OAD]$ otrzymamy $[ABD] = [OAC] + 2[OAD]$. Zauważmy też, że
$$[ABD] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ACD],$$
a więc wystarczy pokazać, że $[ACD] = [OAC] + 2[OAD]$, czyli (po odjęciu $[OAC]$ do pokazania jest równość $[OAD] + [DOC] = 2[OAD]$, czyli $[DOC] = [OAD]$. Trójkąty te mają jednak wspólną podstawą i równe wysokości, czyli mają równe pola.



3. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że
$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

Rozwiązanie. Po sprowadzeniu lewej strony do wspólnego mianownika mamy:
$$\frac{a(b+1)(c+1)+b(c+1)+c}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{a(b+1)(c+1)+(b+1)(c+1)-1}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-1}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

4. Rozstrzygnij, czy szachownicę rozmiaru 27×27 z usuniętym narożnym polem można pokryć klockami o wymiarach 1×4.

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień drugi.

1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy + x + y &= 80 \\ yz + y + z &= 80 \\ zx + z + x &= 80 \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Dodając do stron równań liczbę 1 dostajemy układ równoważny:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) &= 81 \\ (y+1)(z+1) &= 81 \\ (x+1)(z+1) &= 81 \end{cases}.$$

Wynika z niego natychmiast, że x, y, z nie są równe -1 (iloczyn zera i dowolnej liczby jest zerem). Oznacza to w szczególności, że:

$$x + 1 = \frac{81}{y+1}, \quad y + 1 = \frac{81}{z+1}, \quad x + 1 = \frac{81}{y+1}.$$

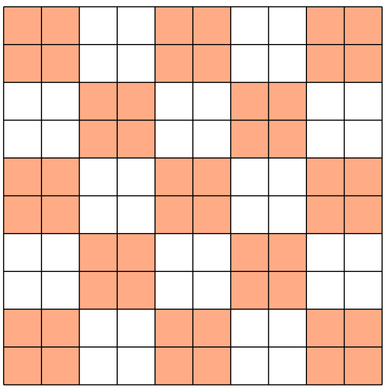
Łatwo stąd widzieć, że $x = y = z$. A zatem wyjściowe równanie przybiera formę:

$$x^2 + 2x - 80 = (x + 10)(x - 8) = 0.$$

Układ ma zatem rozwiązania $(x, y, z) = (-10, -10, -10)$ oraz $(x, y, z) = (8, 8, 8)$.

2. Czy można kwadrat o wymiarach 10×10 pokryć prostokątami o wymiarach 4×1?

Rozwiązanie. Nie jest to możliwe. Potrafkujmy naszą szacownicę jako szachownicę 5×5 złożoną z bloków 2×2. Kolorujemy te bloki naprzemiennie na pomarańczowo i biało:



Gdyby opisane kolorowanie było możliwe, każdy z 25 prostokątów 4×1 pokrywających kwadrat 10×10 zawierałby po 2 pola białe i dwa pomarańczowe. To by oznaczało, że pól w tych kolorach jest łącznie tyle samo. Nie jest to jednak prawda – co łatwo policzyć.

3. Wykaż, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla ktorych $2x^2 + 5y^2 = z^2$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli liczby x, y, z mają wspólny dzielnik d, to również trójka $\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}$ jest rozwiązaniem powyższego równania. Załóżmy więc dalej, że istnieje rozwiązanie rónania wyżej – takie jednak, że liczby x, y, z nie mają wspólnego dzielnika.

Skorzystamy z tego, że przy dzieleniu przez 5 kwadrat liczby naturalnej daje reszty $0, 1, 4$ (można to sprawdzić bezpośrednio podnosząc do kwadratu wyrażenia $5k + r$, dla $r = 0, 1, 2, 3, 4$). To oznacza, że przy dzieleniu przez 5 liczba $2x^2 + 5y^2$ daje zawsze reszty $0, 2$ lub 3. Tymczasem z^2 daje przy dzieleniu przez 5 resztę 0 lub 1. A zatem jeśli rozwiązanie równania wyżej istnieje, to z^2 dzieli się przez 5, a takze $2x^2 + 5y^2$ dzieli się przez 5. To oznacza, że x oraz z są podzielne przez 5, a $5y^2 = z^2 - 2x^2$ jest podzielna przez 25. A zatem 5 jest również dzielnikiem y. Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczby x, y, z są względnie pierwsze.

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E. Prosta prostopadła do AC przechodząca przez punkt E przecina proste AB i AD w punktach, odpowiednio, K i L. Udowodnij, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

`https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2016/12/30/2017-01-delta-K44-M.pdf`

KONKURS ZADANIOWY – grupa starsza. Dzień trzeci.

1. Uzasadnij, że jeśli a, b, c są dodatnie i $a < b$, to
$$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}.$$

Rozwiązanie. Przekształcamy nierówność do postaci równoważnych $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} > 0$. Mamy dalej:
$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c)b - a(b+c)}{b(b+c)} = \frac{ab + bc - ab - ac}{b(b+c)} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}.$$
Z założenia $b - a > 0$, zatem uzyskane wyrażenie jest dodatnie.

2. Wykaż, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których $(3x+4y)(4x+5y) = 7^z$.

Rozwiązanie. (OM, 65, I etap) Przypuśćmy, że dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniają daną równość. Ponieważ liczba 7 jest jedynym dzielnikiem pierwszym prawej strony, więc:
$$3x + 4y = 7^a \quad \text{oraz} \quad 4x + 5y = 7^b,$$
dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a, b o sumie równej x. Nierówność $3x + 4y < 4x + 5y$ pociąga za sobą związek $a < b$. Wobec tego $b \geqslant a + 1$, skąd:
$$4x + 5y = 7^n \geqslant 7 \cdot 7^a = 7(3x + 4y) = 21x + 28y > 4x + 5y.$$
Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi tezy zadania.

3. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła deser, przy czym 51 osób zamówiło deser śmietankowy, a 49 osób – deser czekoladowy. Przed każdą z osób postawiono desery o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym podano 51 deserów śmietankowych i 49 deserów czekoladowych. Pokaż, że można tak obrócić stołem, aby co najmniej 52 osoby otrzymały swoje zamówienie.

4. Okręgi o_1 i o_2, styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punktach X i Y, przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y. Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X. Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q. Wykaż, że $\angle XYB = \angle BYQ$.