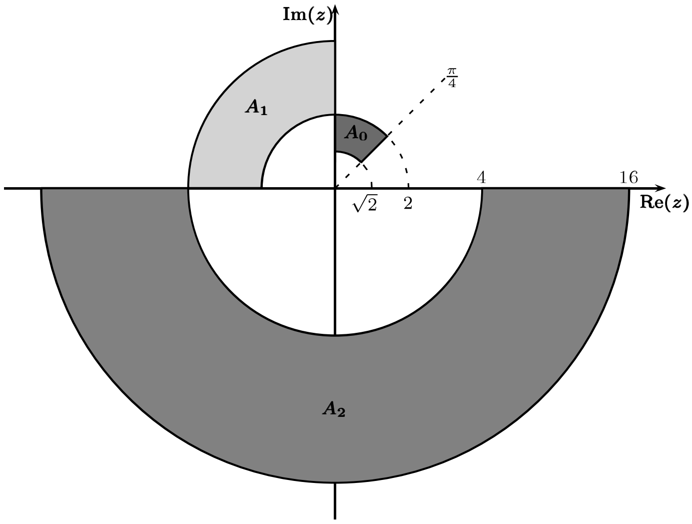
GAL, Kolokwium 1, 28 listopada 2019,
przykładowe rozwiązania, temat A

Zadanie 1. [18 punktów] Zdefiniujmy podzbiory zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} \leqslant |z| \leqslant 2,\ \tfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \tfrac{\pi}{2}\}, \\ A_i &= \{zz' :\ z, z' \in A_{i-1}\} \quad \text{dla } i > 0. \\ B &= A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \end{aligned}$$

(a) Naszkicować zbiory A_0, A_1, A_2.
(b) Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 12 z 2^{12} należące do A_0.
(c) Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą r taką, że $\mathbb{C} = B \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.

Rozwiązanie.
(a) Poniżej rysunek zbiorów A_0, A_1, A_2, przy czym dla czytelności zastosowano skalę logarytmiczną.



Z definicji zbioru A_i wynika, dla $i > 1$, że jeśli A_{i-1} jest zbiorem liczb zespolonych takich, że $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ oraz $\phi_1 \leqslant \arg(z) \leqslant \phi_2$, to A_i jest zbiorem takich z, że $r_1^2 \leqslant |z| \leqslant r_2^2$ oraz $2\phi_1 \leqslant \arg(z) \leqslant 2\phi_2$. W szczególności

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ 2 \leqslant |z| \leqslant 4, \pi/2 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi\} \quad \text{oraz} \quad A_2 = \{z \in \mathbb{C} :\ 4 \leqslant |z| \leqslant 16, \pi \leqslant \arg(z) \leqslant 2\pi\}.$$

(b) Wypiszmy wszystkie pierwiastki stopnia 12 z liczby 2^{12}. W tym celu przedstawiamy ją w postaci trygonometrycznej $2^{12} = 2^{12}(\cos(0) + i\sin(0))$, czyli $|2^{12}| = 2^{12}, \arg(2^{12}) = 0$. Zatem ze wzorów podanych na wykładzie pierwiastki te to $z_0, z_1, \dots, z_{11}$, gdzie

$$\begin{array}{lll} z_0 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{12}\right)) & z_1 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{12}\right)) & z_2 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{12}\right)) \\ z_3 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{12}\right)) & z_4 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{12}\right)) & z_5 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 5\cdot\pi}{12}\right)) \\ z_6 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 6\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 6\cdot\pi}{12}\right)) & z_7 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 7\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 7\cdot\pi}{12}\right)) & z_8 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 8\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 8\cdot\pi}{12}\right)) \\ z_9 = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 9\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 9\cdot\pi}{12}\right)) & z_{10} = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 10\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 10\cdot\pi}{12}\right)) & z_{11} = 2(\cos\left(\frac{2\cdot 11\cdot\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 11\cdot\pi}{12}\right)) \end{array}$$

Pierwiastki te mają moduły równe 2, więc należą do zbioru A_0 wtedy i tylko wtedy, gdy ich argumenty są w przedziale $[\pi/4, \pi/2]$. Łatwo więc widzieć, że są to z_2, z_3.

(c) Zauważmy, że dla $i > 2$ zbiory A_i można opisać w postaci: $A_i = \{z \in \mathbb{C} :\ (\sqrt{2})^{i-2} \leqslant |z| \leqslant 2^{i-2}\}$, ponieważ już zbiór A_3 zawiera elementy o dowolnym argumencie. Zatem również kolejne zbiory A_i mają tę własność. W szczególności zbiór $B \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2)$ to cała płaszczyzna zespolona z wyłączeniem koła opisanego warunkiem $|z| < 16$. Zatem szukane r równe jest 16.

Zadanie 2. [18 punktów] Niech $t \in \mathbb{R}$. Niech V_t będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + tx_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni V_0.
(b) Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni V_t.
(c) Podać bazę pewnej podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ takiej, że $V_0 \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Rozwiązanie. Przekształcamy macierz współczynników przy pomocy operacji elementarnych na wierszach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & t & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & t+2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & t+7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Widać, że dla $t = -7$ rząd macierzy wynosi 2, a dla $t \neq 7$ rząd wynosi 3. Wobec tego $\dim(V_{-7}) = 3$ i $\dim(V_t) = 2$ dla $t \neq -7$, co stanowi odpowiedź do punktu (b).

Dalej zakładamy, że $t = 0$. Wykonujemy kolejne operacje elementarne na wierszach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Przyjmujemy x_3 i x_4 za zmienne wolne. Podstawienie $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ daje rozwiązanie

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 1, 0, 0)$$

a podstawienie $x_3 = 0$, $x_4 = 1$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 0, 1, -3),$$

i te wektory tworzą bazę V_0, co daje odpowiedź w punkcie (a). Układ ten można uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^5$ wektorami $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$ i $(0, 0, 0, 0, 1)$, a więc w punkcie (c) możemy wybrać

$$W = \operatorname{lin}\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Zadanie 3. [18 punktów] Dana jest podprzestrzeń

$$V = \operatorname{lin}\{(1, 2, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 3, 0, 3), (1, 3, 1, 2, 1)\}$$

przestrzeni liniowej K^5.
(a) Dla $K = \mathbb{R}$ znaleźć układ równań opisujący przestrzeń V.
(b) Dla $K = \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni $V \cap \operatorname{lin}\{(3, 1, 2, -1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)\}$.
(c) Dla $K = \mathbb{F}_5$ znaleźć bazę V.

Rozwiązanie. Przekształcamy macierz układu wektorów rozpinających V przy pomocy operacji elementarnych na wierszach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W punkcie (c) mamy $5 = 0$, a więc bazą V jest układ $((1, 0, 3, 4, 3), (0, 1, 1, 1, 1))$. Dla $K = \mathbb{R}$ przekształcamy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd $V = \text{lin}\{(1,0,0,-1,0),(0,1,0,1,0),(0,0,1,0,1)\}$, a szukany układ to

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \\ \quad -x_3 + x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Żeby rozwiązać punkt (b), sprawdzamy wymiar przestrzeni $V + \text{lin}\{(3,1,2,-1,2),(1,1,1,1,1)\}$. Jest ona rozpięta przez układ wektorów o macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rząd tej macierzy to 4, a więc $\dim(V + \text{lin}\{(3,1,2,-1,2),(1,1,1,1,1)\}) = 4$. Wiemy, że $\dim(V) = 3$ i $\dim(\text{lin}\{(3,1,2,-1,2),(1,1,1,1,1)\}) = 2$, stąd $\dim(V \cap \text{lin}\{(3,1,2,-1,2),(1,1,1,1,1)\}) = 1$.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
(a) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą przestrzeni V,
(b) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,
(c) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Rozwiązanie. Będziemy dowodzić cztery implikacje: $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (i)$, $(i) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (i)$.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie bazą przestrzeni V. Gdyby układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha)$ byłby liniowo niezależny. Wówczas jednak, zgodnie z uwagą z wykładu, α nie może należeć do $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. To jest jednak niemożliwe, bo $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, zgodnie z definicją bazy. Zatem układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest maksymalnym niezależnym liniowo układem w V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$. Skoro $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny. Do pokazania, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą V pozostaje wykazać, że $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Jednak z maksymalności układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ wynika, że dla każdego wektora $\alpha \in V$, układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha)$ jest liniowo zależny. W szczególności z uwagi z wykładu wynika, że α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. A zatem istotnie $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie (ponownie) bazą V. Gdyby $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ nie był minimalnym układem rozpinającym V, to zawierałby podukład właściwy rozpinający V. Weźmy jednak dowolny wektor spośród $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie należący do tego podukładu. Jest on kombinacją podukładu, bo podukład ten rozpina przestrzeń V. Daje to sprzeczność z liniową niezależnością układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Dowód implikacji $(iii) \Rightarrow (i)$. Mamy minimalny układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ rozpinający przestrzeń V. Pokażemy, że jest on bazą tej przestrzeni. Wystarczy pokazać liniową niezależność tego układu. Gdyby układ ten był liniowo zależny, to jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ byłby liniową kombinacją pozostałych. Możemy założyć (po ewentualnym przenumerowaniu) $\alpha_k = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$. Wówczas jednak $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, bo dla dowolnego $\alpha \in V$:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \\ &= a_1\alpha_! + \ldots + a_k(\underbrace{b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}}_{\alpha_k}) = \\ &= (a_1 + a_k b_1)\alpha_1 + \ldots + (a_{k-1} + a_k b_{k-1})\alpha_{k-1}. \end{aligned}$$

Jest to jednak sprzeczne z założeniem, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest minimalnym układem rozpinającym V. A zatem układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ będzie macierzą, której jedyne niezerowe wyrazy znajdują się na przekątnej i są równe 1. Zbiór $\mathcal{P}_n$ zawiera wszystkie macierze powstałe z I_n przez wykonanie dowolnie wielu operacji elementarnych zamiany wierszy (w tym I_n). Niech $V = \mathrm{lin}(\mathcal{P}_n)$. Wykazać, że:

(a) jeśli $A \in V$, to suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy A jest taka sama,

(b) jeśli W_0 jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ złożoną z macierzy o zerowej sumie wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie oraz jeśli $F_{ij} \in W_0$ jest taką macierzą, która na pozycjach $(i,j),(n,n)$ ma 1, na pozycjach $(i,n),(n,j)$ ma -1 oraz na pozostałych pozycjach ma 0, to $W_0 = \mathrm{lin}(F_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1)$,

(c) jeśli macierz $R_{(i,j,n)}$ powstaje z I_n przez dwie kolejno wykonane operacje elementarne: zamianę wiersza i-tego z n-tym, a następnie zamianę wiersza j-tego z n-tym, dla $1 \leqslant i,j < n$, $i \neq j$, oraz jeśli macierz $S_{(k,n)}$ powstaje z I_n przez zamianę k-tego i n-tego wiersza, dla $1 \leqslant k < n$, to układ macierzy:

$$\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1, i \neq j\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{I_n\}$$

jest bazą V. W szczególności $\dim(V) = (n-1)^2 + 1$.

Rozwiązanie. Dowód (a). Jest jasne, że każda macierz ze zbioru $\mathcal{P}_n$ posiada dokładnie jeden niezerowy element w każdym wierszu i w każdej kolumnie, który jest równy 1 (można to udowodnić na przykład przez indukcję względem liczby operacji elementarnych zamiany wierszy wykonanych na I_n). A zatem każda macierz z tego zbioru ma jednakową sumę wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Wynosi ona 1. Zauważmy teraz, że jeśli pewne dwie macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ mają tę własność, że suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie każdej z tych macierzy jest jednakowa i wynosi odpowiednio s_A oraz s_B, to macierz $A+B$ oraz macierze aA, gdzie $a \in \mathbb{Q}$, też mają tę własność, że suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest jednakowa, i wynosi ona odpowiednio $s_A + s_B$ oraz as_A. A zatem dowolna kombinacja liniowa macierzy o tej własności też ma tę własność. W szczególności $V = \mathrm{lin}(\mathcal{P}_n)$ złożona jest z macierzy o tej własności (nie wiemy jednak czy każda macierz o tej własności należy do $\mathrm{lin}(\mathcal{P}_n)$ – to pokażemy dalej).

Dowód (b). Niech $Z = (z_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ będzie macierzą, w której sumy wyrazów w każdym wierszu i każdej kolumnie wynoszą 0. Wówczas dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ kombinacja liniowa $z_{i1}F_{i1} + z_{i2}F_{i2} + \ldots + z_{i,n-1}F_{i,n-1}$ równa jest, zgodnie z założeniem o sumie wyrazów w i-tym wierszu $z_{i1} + z_{i2} + \ldots + z_{i,n-1} + z_{i,n} = 0$ mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{i1} & z_{i2} & \ldots & z_{i,n-1} & -z_{i1} - z_{i2} - \ldots - z_{i,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -z_{i1} & -z_{i2} & \ldots & -z_{i,n-1} & z_{i1} + z_{i2} + \ldots + z_{i,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{i1} & z_{i2} & \ldots & z_{i,n-1} & z_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -z_{i1} & -z_{i2} & \ldots & -z_{i,n-1} & -z_{i,n} \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że macierz postaci $\sum_{i=1}^{n-1} z_{i1}F_{i,1} + z_{i2}F_{i,2} + \ldots + z_{i,n-1}F_{i,n-1}$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \ldots & z_{1,n} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ -z_{11} & \ldots & -z_{1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ z_{21} & \ldots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ -z_{21} & \ldots & -z_{2,n} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n-1,1} & \ldots & z_{n-1,n} \\ -z_{n-1,1} & \ldots & -z_{n-1,n} \end{bmatrix} = Z.$$

W ostatniej równości korzystamy z założenia, że suma wyrazów każdej z kolumn jest zerowa, a więc mamy na przykład równość $-z_{11} - z_{21} - \ldots - z_{n-1,1} = z_{n1}$. A zatem Z jest kombinacją liniową macierzy F_{ij} postaci:

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}F_{ij}.$$

Pokazaliśmy zatem, że każdy element podprzestrzeni W_0 jest kombinacją liniową macierzy F_{ij}.

Teza w punkcie (c) tak, jak została postawiona na kolokwium nie jest prawdziwa. W zbiorze:

$$\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i < j \leqslant n-1\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{I_n\}$$

jest jedynie $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 + 1$ elementów, a więc mniej niż $(n-1)^2 + 1$. Poprawna teza punktu (c)[1]:

(c) jeśli macierz $R_{(i,j,n)}$ powstaje z I_n przez dwie kolejno wykonane operacje elementarne: zamianę wiersza i-tego z n-tym, a następnie zamianę wiersza j-tego z n-tym, dla $1 \leqslant i,j < n$, $i \neq j$ oraz jeśli macierz $S_{(k,n)}$ powstaje z I_n przez zamianę k-tego i n-tego wiersza, dla $1 \leqslant k < n$, to układ macierzy:

$$\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1, i \neq j\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{I_n\}$$

jest bazą V. W szczególności $\dim(V) = (n-1)^2 + 1$.

Serdecznie przepraszam za pomyłkę! (Arkadiusz Męcel)

Dowód (c). Zauważmy, że jeśli $i \neq j$ oraz $i, j < n$, a także jeśli $k < n$, wówczas mamy:

$$F_{ij} = I_n - S_{(i,n)} - S_{(j,n)} + R_{(j,i,n)}, \quad F_{k,k} = I_n - S_{(k,n)}. \qquad (\star)$$

Zauważmy też, że macierze $R_{(j,i,n)}$ oraz $S_{(k,n)}$ należą do $\mathcal{P}_n$. A zatem na mocy punktów (a) i (b) mamy:

$$W_0 \overset{(b)}{=} \operatorname{lin}(F_{ij}) \overset{(\star)}{\subseteq} \operatorname{lin}(\{R_{(i,j,n)}\} \cup \{S_{(k,n)}\} \cup \{I_n\}) \subseteq \operatorname{lin}(\mathcal{P}_n) = V \overset{(a)}{\subseteq} W,$$

gdzie W jest podprzestrzenią wszystkich macierzy, które mają taką samą sumę wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie (oczywiście $W_0 \subseteq W$).

Zauważmy jednak, że jeśli S jest macierzą, której suma elementów w każdym wierszu i każdej kolumnie równa jest t, to $S - tI_n \in W_0$. Każda macierz z W jest w rezultacie, na mocy punktu (b), kombinacją liniową macierzy F_{ij} oraz I_n. A zatem $W = \operatorname{lin}(F_{ij} \cup \{I_n\})$. Stąd:

$$W = \operatorname{lin}(F_{ij} \cup \{I_n\}) \subseteq \operatorname{lin}(\{R_{(i,j,n)}\} \cup \{S_{(k,n)}\} \cup \{I_n\}) \subseteq V \subseteq W.$$

W rezultacie wszystkie powyższe inkluzje są równościami, w szczególności $V = W$.

Układ $\{F_{ij}, 1 \leqslant i,j < n\}$ jest liniowo niezależny. Wynika to natychmiast z dowodu (b), gdzie opisaliśmy `każdą` liniową kombinację wektorów F_{ij}. Jeśli macierz Z z punktu (b) jest zerowa, to wszystkie z_{ij} są zerowe. Skoro więc $I_n \notin W_0$, to widzimy, że układ $\{F_{ij}, 1 \leqslant i,j < n\}$ tworzy bazę W_0, a układ $\{F_{ij} \cup I_n, 1 \leqslant i,j < n\}$ tworzy bazę W. Dostajemy zatem $\dim(V) = \dim(W) = (n-1)^2 + 1$. Jednak zbiór $\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1, i \neq j\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{I_n\}$ rozpina $W = V$ oraz ma $(n-1)^2 + 1$ elementów. Jest to zatem minimalny układ rozpinający $W = V$, a więc także baza przestrzeni V.

Uwaga. Można też pokazać wprost, że układ $\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1, i \neq j\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{I_n\}$ jest liniowo niezależny, patrząc na ostatnie wiersze i ostatnie kolumny dowolnych ich kombinacji liniowych.

Uwaga 2. Macierze ze zbioru $\mathcal{P}_n$ nazywamy macierzami permutacyjnymi rozmiaru n. Zbiór tych macierzy jest równoliczny ze zbiorem permutacji zbioru n-elementowego, a więc ma $n!$ elementów. Biorąc pod uwagę, że wymiar całej przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ wynosi n^2 teza zadania w punkcie (c) może być pewnym zaskoczeniem.

[1] Oczywiście osobom, które wskazały ten błąd przysługuje pełna liczba punktów. Podobnie tym, którzy nie zauważyli tego rozróżnienia i rozwiązywali zadanie tak, jakby chodziło o „poprawny" zbiór macierzy.

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) W przestrzeni $\mathbb{R}^{11}$ dane są podprzestrzenie V, W, przy czym $\dim(V) = 6$ oraz $\dim(W) = 8$. Czy przestrzeń $V \cap W$ może mieć wymiar 5?

Rozwiązanie. Niech ϵ_i będą wektorami bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^{11}$, dla $1 \leqslant i \leqslant 11$. Wtedy jeśli $V = \text{lin}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_6)$ oraz $W = \text{lin}(\epsilon_2, \dots, \epsilon_9)$, ro nietrudno widzieć, że $V \cap W = \text{lin}(\epsilon_2, \dots, \epsilon_6)$, czyli $\dim(V) = 6, \dim(W) = 8, \dim(V \cap W) = 5$.

(b) Czy istnieje wielomian $w(x)$ stopnia 20 o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_{23}$ taki, że $w(a) = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{F}_{23}$?

Rozwiązanie. Załóżmy, że taki wielomian $w(x)$ istnieje. Rozważmy wielomian

$$v(x) = (x-2) \cdot (x-3) \cdot ... \cdot (x-21) \in \mathbb{F}_{23}[x].$$

Jest to wielomian stopnia 20, a zatem reszta $r(x)$ z dzielenia $w(x)$ przez $v(x)$ jest wielomianem stopnia 0. Skoro też $w(2) = v(2) + r(2) = 0$, to r jest wielomianem stale równym zero, a zatem $w(x) = v(x)$. Zauważmy jednak, że wówczas $w(22) = 0$, zaś $v(22) = 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 1$ jest iloczynem niezerowych elementów ciała $\mathbb{F}_{23}$, a więc jest elementem niezerowym. Sprzeczność. Odpowiedź: NIE.

(c) Macierz $A \in M_{4x3}(K)$ jest macierzą współczynników jednorodnego układu równań, mającego więcej niż jedno rozwiązanie. Jaki jest największy możliwy rząd macierzy A?

Rozwiązanie. Wiadomo, że przestrzeń wierszy macierzy A rozpięta jest przez 4 wektory zawarte w $\mathbb{R}^3$, a więc $r(A) \leqslant 3$. Jeśli jednak $r(A) = 3$, to wymiar przestrzeni rozwiązań tego układu wynosi 0, a zatem układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. A zatem $r(A) \leqslant 2$. Przykładowy układ czterech równań o trzech niewiadomych spełniający warunki zadania przy $r(A) = 2$:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, 0 = 0, 0 = 0.$$

(d) Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową, $W \subseteq V$ podprzestrzenią liniową, a $\alpha \in V \setminus W$ wektorem takim, że $V = W + \text{lin}(\alpha)$. Czy dla każdej bazy $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ przestrzeni W układ $(\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha)$ jest bazą V?

Rozwiązanie. Skoro $\alpha \in V \setminus W$, to dla każdej bazy $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ przestrzeni W układ $(\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha)$ jest liniowo niezależny (bo β_i są liniowo niezależne) – fakt z wykładu. Z drugiej strony skoro $V = W + \text{lin}(\alpha)$, to każdy wektor z przestrzeni V jest sumą $\alpha_1 \in W$ oraz $\alpha_2 \in \text{lin}(\alpha)$. W szczególności jest on kombinacją liniową wektorów z układu $(\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha)$. A zatem $V = \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha)$, co z połączeniu z liniową niezależnością tego układu oznacza, że jest on bazą V. Odpowiedź: TAK.

(e) Dane są podprzestrzenie liniowe $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^6$, przy czym $\dim(V) = 5$ oraz $W \neq \mathbb{R}^6$. Czy wynika z tego, że $V = W$?

Rozwiązanie. Skoro $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^6$, to $\dim(V) \leqslant \dim(W) \leqslant 6$. Skoro $W \neq \mathbb{R}^6$, to $\dim(W) \neq 6$, a zatem $\dim(W) \leqslant 5$. A zatem $5 = \dim(V) \leqslant \dim(W) \leqslant 5$. W szczególności $\dim(W) = 5$. A zatem $V \subseteq W$ oraz $\dim(V) = \dim(W)$. Zgodnie z faktem z wykładu mamy zatem $V = W$. Odpowiedź: TAK.

(f) Dany jest liniowo zależny układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ w przestrzeni liniowej V. Czy każdy z wektorów α_i tego układu można zapisać jako kombinację liniową pozostałych, tj. wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n$?

Rozwiązanie. Weźmy układ wektorów: $((1,1), (2,2), (1,0))$ z przestzeni $\mathbb{R}^2$. Mamy

$$2(1,1) - 1(2,2) + 0(1,0) = (0,0),$$

więc układ ten jest liniowo zależny, ale $(1,0)$ nie jest w sposób oczywisty kombinacją liniową wektorów $(1,1)$ oraz $(2,2)$. Odpowiedź: NIE.