GAL Kolokwium 2, 23 stycznia 2017, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]
Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$\varphi_t((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5, 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + tx_4 + 3x_5)$.

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi_5)$ oraz znaleźć wymiar przestrzeni $im(\varphi_5)$.

(b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?

Zadanie 2. [18 pt] Dane są macierze $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(a) Obliczyć $\det(B)$. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$(B^T)^4 \cdot (A_t)^3 \cdot B^{-4}$$

w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

(b) Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ & & & \vdots & & & \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Zadanie z teorii 3. [10 pt]
Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru i niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że $\dim\ker(\varphi) + \dim\mathrm{im}(\varphi) = \dim V$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 2, 23 stycznia 2017, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. [18 pt]
(a) Dana baza $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, -1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, -1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz funkcjonał $f \in (\mathbb{R}^3)^*$

$$f(x, y, z) = x + 2y + z$$

Znaleźć współrzędne funkcjonału f w bazie sprzężonej α_1^*, α_2^*, α_3^*.
(b) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem zadanym wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (x - y, 2x - y - z, y - z, 2x - 2z)$$

Znaleźć bazę obrazu φ^*.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : (\mathbb{Z}_{11})^{10} \to (\mathbb{Z}_{11})^{11}$ takie, że $\dim \ker(\varphi) = 2$, $\dim \operatorname{im}(\varphi) = 9$?

2. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ takie, że φ jest epimorfizmem, ale $\varphi^* : W^* \to V^*$ nie jest epimorfizmem?

3. Niech A będzie macierzą rozmiaru 3×3 nad ciałem $\mathbb{K}$. Wiadomo, że $\det(A) = -1$. Obliczyć $\det(2A)$.

Zadanie 5 (c.d.)

4. Czy formuła $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ jest prawdziwa dla dowolnych kwadratowych macierzy A i B równego rozmiaru.

5. Niech $(2,0)$, $(0,1)$ będzie bazą $\mathbb{R}^2$. Czy baza sprzężona składa się z funkcjonałów $f(x,y) = 2x$, $g(x,y) = y$?

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ będą przekształceniami liniowymi. Czy przekształcenie liniowe $\psi\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będące ich złożeniem może być monomorfizmem?

Zadanie 6. [18 pt]

a) Przypuśćmy, że V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni liniowych W_1 i W_2. Wykazać, że dla dowolych przekształaceń liniowych $\varphi_1 : W_1 \to Z$ i $\varphi_2 : W_2 \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\varphi : V \to Z$ takie, że $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$, dla $\alpha \in W_1$ i $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$ dla $\beta \in W_2$.

b) Dane dwie podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 w V mające tę własność, że dla dowolnej przestrzeni liniowej Z i dla dowolych przekształaceń liniowych $\varphi_1 : W_1 \to Z$ i $\varphi_2 : W_2 \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\varphi : V \to Z$ takie, że $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$, dla $\alpha \in W_1$ i $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$ dla $\beta \in W_2$. Udowodnić, że $V = W_1 \oplus W_2$.

GAL Kolokwium 2, 23 stycznia 2017, **Temat B**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]
Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\varphi_t((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5, 5x_1 + 3x_2 + tx_3 + 5x_4 + 5x_5)\,.$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi_3)$ oraz znaleźć wymiar przestrzeni $im(\varphi_3)$.

(b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?

Zadanie 2. [18 pt] Dane są macierze $A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Obliczyć $\det(B)$. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$(B^T)^4 \cdot (A_t)^3 \cdot B^{-4}$$

w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

(b) Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ & & & \vdots & & & \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Zadanie z teorii 3. [10 pt]
Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru i niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że $\dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi) = \dim V$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 2, 23 stycznia 2017, **Temat B**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. [18 pt]
(a) Dana baza $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz funkcjonał $f \in (\mathbb{R}^3)^*$

$$f(x, y, z) = x + 2y + z$$

Znaleźć współrzędne funkcjonału f w bazie sprzężonej α_1^*, α_2^*, α_3^*.
(b) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem zadanym wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (y + z, x + y + 2z, x - y, 2x + 2z)$$

Znaleźć bazę obrazu φ^*.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : (\mathbb{Z}_{11})^{10} \to (\mathbb{Z}_{11})^{11}$ takie, że $\dim \ker(\varphi) = 2$, $\dim \operatorname{im}(\varphi) = 9$?

2. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ takie, że φ jest epimorfizmem, ale $\varphi^* : W^* \to V^*$ nie jest epimorfizmem?

3. Niech A będzie macierzą rozmiaru 3×3 nad ciałem $\mathbb{K}$. Wiadomo, że $\det(A) = -1$. Obliczyć $\det(2A)$.

Zadanie 5 (c.d.)
4. Czy formuła $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ jest prawdziwa dla dowolnych kwadratowych macierzy A i B równego rozmiaru.

5. Niech $(2,0)$, $(0,1)$ będzie bazą $\mathbb{R}^2$. Czy baza sprzężona składa się z funkcjonałów $f(x,y) = 2x$, $g(x,y) = y$?

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ będą przekształceniami liniowymi. Czy przekształcenie liniowe $\psi\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będące ich złożeniem może być monomorfizmem?

Zadanie 6. [18 pt]
a) Przypuśćmy, że V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni liniowych W_1 i W_2. Wykazać, że dla dowolych przekształaceń liniowych $\varphi_1 : W_1 \to Z$ i $\varphi_2 : W_2 \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekszta1cenie $\varphi : V \to Z$ takie, że $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$, dla $\alpha \in W_1$ i $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$ dla $\beta \in W_2$.

b) Dane dwie podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 w V mające tę własność, że dla dowolnej przestrzeni liniowej Z i dla dowolych przekształaceń liniowych $\varphi_1 : W_1 \to Z$ i $\varphi_2 : W_2 \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekszta1cenie $\varphi : V \to Z$ takie, że $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$, dla $\alpha \in W_1$ i $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$ dla $\beta \in W_2$. Udowodnić, że $V = W_1 \oplus W_2$.