GAL I, Kolokwium 1 TEMAT **A** 30.11.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z^4) > 0\}$ i niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie dane wzorem $f(z) = (1+i)z + 2$.

   (a) Naszkicować zbiór D i zbiór $f(D)$.

   (b) Rozpatrzmy wielomian $g(z) = z^3 + 1 \in \mathbb{C}[z]$. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\}$. Które z liczb ze zbioru A leżą w zbiorze D?

2. [18 punktów]

   Niech $V = \operatorname{lin}((1,2,1,2),(2,5,3,2),(1,3,2,0)) \subset \mathbb{R}^4$ i niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} .$$

   (a) Znaleźć $\dim V$ i $\dim W$.

   (b) Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.

   (c) Niech $W_t = \operatorname{lin}((5,12,t,6),(5,11,6,t))$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_t$?

3. [10 punktów]

   Niech W_1, W_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wykazać, że

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)) \ .$$

GAL I, Kolokwium 1 TEMAT **A** 30.11.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

   Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $\varphi((1,2)) = (1,2,4,5)$, $\varphi((1,3)) = (2,5,2,5)$ i niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem $\psi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - 2x_3, 0, -2x_1 + 4x_3)$.

   (a) Znaleźć wzór na przekształcenie φ.

   (b) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\psi)$ i znaleźć bazę przestrzeni $\operatorname{im}(\varphi)$.

   (c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\psi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane warunkiem: $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ $\psi_t((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2,x_3) + t \cdot \psi((x_1,x_2,x_3))$ jest izomorfizmem?

5. [każde pytanie za 3 punkty]

   (a) Czy przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^3$ zawiera układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, który jest liniowo zależny ale każdy jego podukład złożony z dwóch wektorów jest liniowo niezależny?

   (b) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni V i niech wektor $\beta \in V$ ma w tej bazie wszystkie współrzędne równe 1. Czy układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ też jest bazą przestrzeni V?

   (c) Czy istnieje przestrzeń liniowa V wymiaru 7 zawierająca podprzestrzenie W_1, W_2 takie, że $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 5$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$?

(d) Czy dla każdych niezerowych wektorów α, β, γ przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że $\varphi(\alpha) = \gamma = \varphi(\beta)$?

(e) Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $2n$ i niech W będzie jej $n-$wymiarową podprzestrzenią. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że $\ker(\varphi) = W$ i $\operatorname{im}(\varphi) = W$?

(f) Dane są wielomiany $f(x) = x^3 + 1$ oraz $g(x) = (x - a)^3$ należące do $\mathbb{Z}_3[x]$. Czy istnieje $a \in \mathbb{Z}_3$ takie, że wielomiany te są równe?

6. [18 punktów]

Mówimy, że układ jednorodny równań liniowych U o n równaniach i n niewiadomych jest oznaczony, jeśli jedynym rozwiązaniem tego układu jest $(0, \ldots, 0)$.

(a) Wykazać, że jeśli $R : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ jest niezerowym równaniem a U jest układem oznaczonym, to któreś równanie układu U można zastąpić równaniem R tak, że otrzymany układ U' też jest oznaczony.

(b) Wykazać, że dla każdego niezerowego równania $R : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ i każdej liczby $k \in \{1, \ldots, n\}$ istnieje układ oznaczony U_k taki, że zastąpienie $i-$tego równania układu U_k równaniem R daje: dla $i = 1, \ldots, k$ układ oznaczony, dla $i = k + 1, \ldots, n$ układ, który nie jest oznaczony.

GAL I, Kolokwium 1 TEMAT **B** 30.11.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z^4) < 0\}$ i niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie dane wzorem $f(z) = (1-i)z + 2i$.

   (a) Naszkicować zbiór D i zbiór $f(D)$.

   (b) Rozpatrzmy wielomian $g(z) = z^3 + 8 \in \mathbb{C}[z]$. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\}$. Które z liczb ze zbioru A leżą w zbiorze D?

2. [18 punktów]

   Niech $V = \operatorname{lin}((1,3,1,2),(2,7,3,6),(1,4,2,4)) \subset \mathbb{R}^4$ i niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0 \\ 5x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}.$$

   (a) Znaleźć $\dim V$ i $\dim W$.

   (b) Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.

   (c) Niech $Z_t = \operatorname{lin}((3,10,t,8),(2,5,1,t))$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = V \oplus Z_t$?

3. [10 punktów]

   Niech W_1, W_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wykazać, że

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)) .$$

GAL I, Kolokwium 1 TEMAT **B** 30.11.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $\varphi((1,3)) = (2,7,3,4)$, $\varphi((1,2)) = (1,5,2,3)$ i niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem $\psi((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, 0, -4x_1 + 2x_3)$.

(a) Znaleźć wzór na przekształcenie φ.

(b) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\psi)$ i znaleźć bazę przestrzeni $\operatorname{im}(\varphi)$.

(c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\psi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane warunkiem: $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ $\psi_t((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2,x_3) + t \cdot \psi((x_1,x_2,x_3))$ jest izomorfizmem?

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni V i niech wektor $\gamma \in V$ ma w tej bazie wszystkie współrzędne równe 1. Czy układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma$ też jest bazą przestrzeni V?

(b) Czy przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^3$ zawiera układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, który jest liniowo zależny ale każdy jego podukład złożony z dwóch wektorów jest liniowo niezależny?

(c) Czy istnieje przestrzeń liniowa V wymiaru 9 zawierająca podprzestrzenie W_1, W_2 takie, że $\dim W_1 = 7$, $\dim W_2 = 5$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$?

(d) Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $2k$ i niech W będzie jej $k-$wymiarową podprzestrzenią. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że $\ker(\varphi) = W$ i $\operatorname{im}(\varphi) = W$?

(e) Czy dla każdych niezerowych wektorów α, β, γ przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że $\varphi(\alpha) = \gamma = \varphi(\beta)$?

(f) Dane są wielomiany $f(x) = x^3 + 1$ oraz $g(x) = (x + a)^3$ należące do $\mathbb{Z}_3[x]$. Czy istnieje $a \in \mathbb{Z}_3$ takie, że wielomiany te są równe?

6. [18 punktów]

Mówimy, że układ jednorodny równań liniowych U o n równaniach i n niewiadomych jest oznaczony, jeśli jedynym rozwiązaniem tego układu jest $(0, \ldots, 0)$.

(a) Wykazać, że jeśli $R : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ jest niezerowym równaniem a U jest układem oznaczonym, to któreś równanie układu U można zastąpić równaniem R tak, że otrzymany układ U' też jest oznaczony.

(b) Wykazać, że dla każdego niezerowego równania $R : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ i każdej liczby $k \in \{1, \ldots, n\}$ istnieje układ oznaczony U_k taki, że zastąpienie $i-$tego równania układu U_k równaniem R daje: dla $i = 1, \ldots, k$ układ oznaczony, dla $i = k + 1, \ldots, n$ układ, który nie jest oznaczony.