GAL2*, kolokwium 23.04.2022

Za każde zadanie można otrzymać do 20 punktów.

Zadanie 1 Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z obiektem końcowym oznaczanym ω.

(a) Udowodnij, że dla każdego obiektu A w $\mathcal{C}$, każdy morfizm $\omega \to A$, o ile istnieje, to jest monomorfizmem.

(b) Dla obiektu A definiujemy zbiór $Pts(A) = Mor_{\mathcal{C}}(\omega, A)$, zbiór punktów w A. Dla morfizmu $f : A \to B$ definiujemy odwzorowanie zbiorów $f_* : Pts(A) \to Pts(B)$

$$(g : \omega \to A) \quad \mapsto \quad (f \circ g : \omega \to B)\,.$$

Udowodnić, że jeśli $f : A \to B$ jest monomorfizmem, to odwzorowanie $f_* : Pts(A) \to Pts(B)$ jest monomorfizmem zbiorów.

(c) Sprawdź czy dla kategorii $\mathcal{C} = \mathcal{V}ect_K$ wynikanie przeciwne jest prawdziwe, czyli czy

$$f_* \ \text{ monomorfizm } \implies f \ \text{ monomorfizm ?}$$

Zadanie 2 Niech K będzie ciałem charakterystyki 0. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą endomorfizmu $f : K^3 \to K^3$ w standardowej bazie.

(a) Znajdź wartości własne i wektory własne.

(b) Wskaż jaka jest postać Jordana przekształcenia f.

(c) Znajdź bazę Jordana.

(d) Czy odpowiedź w (b) zależy od charakterystyki ciała?

Podpowiedź: $w_f = -(x+2)(x-1)^2$.

Zadanie 3 Niech K będzie ciałem charakterystyki zero, V przestrzenią wektorową oraz $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jej bazą. Przez $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ oznaczamy bazę sprzężoną.

(a) Pokaż, że przekształcenie $\alpha : V \otimes V^* \to K$ zadane wzorem

$$\alpha(e_k \otimes e_\ell^*) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = \ell \\ 0 & \text{gdy } k \neq \ell \end{cases}$$

nie zależy od wyboru bazy.

(b) Wykaż, że przekształcenie $\iota : V \otimes \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$ zadane wzorem

$$\iota\big(e_j \otimes (e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*)\big) = \begin{cases} (-1)^{\ell-1} \cdot e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_{\ell-1}}^* \wedge e_{i_{\ell+1}}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* & \text{gdy } i_1 < i_2 < \cdots < i_k\,, \quad j = i_\ell \\ 0 & \text{gdy } j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \end{cases}$$

nie zależy od wyboru bazy.

(c) Pokaż, że dla każdego $v \in V$, $\xi \in \bigwedge^i V^*$, $\eta \in \bigwedge^j V^*$ mamy

$$\iota(v \otimes (\xi \wedge \eta)) = \iota(v \otimes \xi) \wedge \eta + (-1)^i \xi \wedge \iota(v \otimes \eta)\,.$$

Zadanie 4 Niech V_n będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych stopnia $\leqslant n$ Dana jest forma dwuliniowa w V_n zadana wzorem $\phi_n(f, g) = (f \cdot g)^{(n)}(1)$, tzn. bierzemy wartość n-tej pochodnej iloczynu w 1.

(a) Dla $n = 3$ znajdź bazę ortogonalną dla formy ϕ_n.

(b) Dla $n = 4$ wskaż podprzestrzeń izotropową maksymalnego wymiaru.

(c) Podaj wzór na rząd i sygnaturę ϕ_n dla ogólnego n.

Zadanie 5 Niech V będzie przestrzenią macierzy symetrycznych 2×2 o współczynnikach w $\mathbb{R}$. Rozpatrzmy następujące macierze w V:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Pokaż, że V z iloczynem skalarnym $\langle A, B \rangle = tr(A \cdot B)$ jest przestrzenią euklidesową; przypomnienie: tr oznacza ślad macierzy.

(b) Znajdź bazę ortogonalną $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przestrzeni V taką, że $\mathrm{lin}(\alpha_1) = \mathrm{lin}(A_1)$ i $\mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{lin}(A_1, A_2)$.

(c) Znajdź bazę ortogonalną $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ przestrzeni V taką, że $\mathrm{lin}(\beta_1) = \mathrm{lin}(A_2)$ i $\mathrm{lin}(\beta_1, \beta_2) = \mathrm{lin}(A_2, A_3)$.