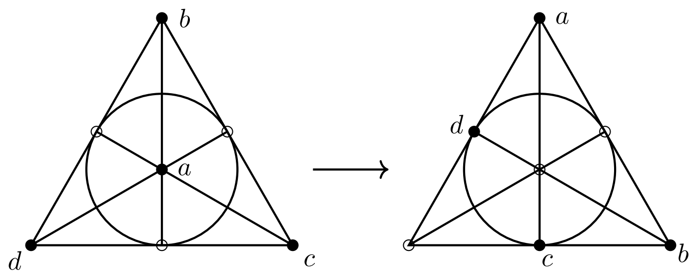
GAL2* Lato 2021/2022
EGZAMIN PISEMNY, część I 20.06.2022

Na tą część mają Państwo 50 minut. Odpowiadając proszę podać uzasadnienie wraz ze stosownymi obliczeniami. Odpowiedź bez poprawnego uzasadnienia lub obliczeń nie będzie zaliczona.

Pytanie 1 (10pkt) Przestrzeń afiniczną $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ rozpatrujemy ze standardową strukturą afinicznej przestrzeni euklidesowej. Czy istnieje izometria $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ taka, że wielomian charakterystyczny pochodnej przekształcenia f jest równy $-x^3 - x^2 - x - 1$ oraz $f((0,0,0)) = (1,0,-1)$ i $f((1,1,0)) = (2,1,-1)$?

Odpowiedź i uzasadnienie:

Pytanie 2 (10pkt) Czy istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny Fano przekształcające wyróżnione na czarno cztery punkty w sposób podany poniżej?



Odpowiedź i uzasadnienie:

Pytanie 3 (10pkt) Czy powierzchnia $V(2x_1^2 - x_2^2 + x_3) \subset \mathbb{R}^3$ jest prostokreślna?

Odpowiedź i uzasadnienie:

Pytanie 4 (10pkt) Rozpatrzmy $\mathbb{R}^4$ ze standardową strukturą przestrzeni euklidesowej i orientacją zadaną przez standardową bazę ortonormalną. Niech $\alpha_1 = (1,1,0,0)$, $\alpha_2 = (0,1,1,0)$, $\alpha_3 = (0,0,1,1)$. Policz iloczyn wektorowy $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$.

Odpowiedź i obliczenia:

Pytanie 5 (10pkt) Załóżmy, że endomorfizm $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ zadany jest w standardowej bazie macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^3$, dla którego endomorfizm φ jest samosprzężony?

Odpowiedź i uzasadnienie:

Pytanie 6 (10pkt) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$ z bazą $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Rozstrzygnij czy tensor $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4 \in \bigwedge^2 V$ jest prosty.

Odpowiedź i uzasadnienie:

GAL2* — Lato 2021/2022
EGZAMIN PISEMNY, część II — 20.06.2022

Na tą część mają Państwo 3 godziny. Rozwiązania zadań proszę spisać na osobnych kartkach. Proszę pamiętać o przedstawieniu obliczeń, wraz z wyjaśnieniami co się liczy, oraz podawaniu uzasadnień do przedstawianych tez. Odwołania do twierdzeń lub lematów powinny być przedstawione w sposób jasny, z podaniem nazwy faktu, do którego się odwołujemy.

Zadanie 1 (25pkt) Niech $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że

$$f([2,2]) = [3,3]\,, \qquad f[3,1] = [5,3]\,, \qquad f[1,5] = [0,4]\,.$$

Znaleźć punkty stałe i proste niezmiennicze przekształcenia f.

Zadanie 2 (25pkt) Sprawdź, że przekształcenie $\mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f([x,y,z]) = \left[\frac{2x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{3} + 1, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3}, \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3} + 2\right]$$

jest izometrią afiniczną. Pokaż, że pochodna $T(f)$ jest obrotem. Udowodnij, że przekształcenie f jest złożeniem obrotu i przesunięcia wzdłuż osi tego obrotu; podaj wektor przesunięcia i oś obrotu.

Zadanie 3 (25pkt) Niech $\Im \simeq \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią urojonych kwaternionów ze standardową bazą $\mathfrak{i},\ \mathfrak{j},\ \mathfrak{k}$ spełniającą relacje $\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{k} = -1$.

(a) Dane jest przekształcenie $\varphi \in Aut(\Im)$ takie, że $\varphi(\mathfrak{i}) = \mathfrak{j}$, $\varphi(\mathfrak{j}) = \mathfrak{k}$, $\varphi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{i}$. Znajdź kwaternion $u \in \mathbb{H}$ taki, że dla każdego $h \in \Im$ mamy $\varphi(h) = uhu^{-1}$. Czy kwaternion u jest wyznaczony jednoznacznie?

(b) Dane jest przekształcenie $\psi \in Aut(\Im)$ takie, że $\psi(\mathfrak{i}) = \mathfrak{j}$, $\psi(\mathfrak{j}) = \mathfrak{i}$, $\psi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$. Czy istnieje kwaternion $u \in \mathbb{H}$ taki, że dla dowolnego $h \in \Im$ mamy $\psi(h) = uhu^{-1}$?

Zadanie 4 (25pkt) W rozwiązaniu punktu (b) wykorzystaj obliczenia z punktu (a); podaj odpowiednie wyjaśnienie.

(a) Rozpatrzmy macierz 2×2 o współczynnikach zespolonych

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

Pokaż, że $A \in SU(2)$, znajdź wartości własne i wektory własne A.

(b) Niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie endomorfizmem zadanym w bazie standardowej następującą macierzą

$$B = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdź, że φ jest izometrią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym produktem skalarnym i następnie, korzystając z poprzedniej części, pokaż rozkład φ-niezmienniczy na przestrzenie wymiaru dwa $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$, takie że $\varphi_{|V_i} : V_i \longrightarrow V_i$ jest obrotem dla $i = 1,2$. Podaj bazy podprzestrzeni V_i. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5 (40pkt) Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Rozważamy przestrzeń liniową $V = \mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym i standardową bazą ortonormalną $e_1, \; e_2, \dots e_n$. Iloczyn skalarny wektorów $v, w \in V$ jest oznaczany przez $\langle v, w\rangle$. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} - e_i & \text{if } i = 1, 2, \dots n-1 \\ e_1 - e_n & \text{if } i = n\,. \end{cases}$$

Niech $\Delta = f^* \circ f$, gdzie f^* jest przekształceniem sprzężonym do f, tzn. dla $v, w \in V$ mamy $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$.

(a) Dla każdego $n > 1$ udowodnij, że istnieje przekształcenie liniowe $\pi : V \to V$ takie, że

$$\pi \circ \Delta = \Delta \circ \pi\,, \qquad \pi \circ \pi = \pi$$

oraz obraz π jest równy $ker(\Delta)$.

(b) Dla każdego $n > 1$ udowodnij, że wartości własne Δ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

(c) Dla każdego $n > 1$ udowodnij, że $ker(\Delta) = ker(f)$ i znajdź bazę $ker(\Delta)$.