# GAL II* Kolokwium 2, 20 maja 2021

Uwaga: rozwiązania składają Państwo tylko na Moodle.

**Zadanie 1. (15p)** W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń

$$W = \mathrm{lin}((1,-1,0,0),(1,0,-1,0)).$$

Znajdź wzór na rzut prostopadły $\mathbb{R}^4$ na $W$.
Znajdź obraz wektora $(2,1,1,1)$ w symetrii prostopadłej względem $W^\perp$.

**Zadanie 2. (15p)** Dane są macierze $A, B \in M_4(K)$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy istnieje taka forma dwuliniowa $h$ na przestrzeni $K^4$ oraz baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $K^4$ taka, że $G(h, st) = A$ oraz $G(h, \mathcal{A}) = B$? Jeśli baza $\mathcal{A}$ istnieje, wyznacz ją. Odpowiedź uzależnij od własności ciała $K$.

**Zadanie 3. (15p)** Dla podzbiorów $H_1, H_2$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ definiujemy zbiór:

$$H_3 = \{tp + (1-t)q \mid p \in H_1, q \in H_2, t \in \mathbb{R}\}.$$

- Dla $H_1 = (1,0,1) + \mathrm{lin}((1,1,0)), H_2 = (1,1,2) + \mathrm{lin}((1,1,0))$ znajdź równanie opisujące $H_3$.
- Dla $H_1 = (2,1,0) + \mathrm{lin}((3,2,1)), H_2 = (2,1,0) + \mathrm{lin}((1,1,4))$ znajdź bazę punktową i układ bazowy przestrzeni $H_3$.
- Czy dla $H_1 = (0,0,1) + \mathrm{lin}((1,0,0)), H_2 = (1,0,0) + \mathrm{lin}((0,1,0))$ zbiór $H_3$ jest podprzestrzenią afiniczną w $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 4. (15p)** Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą macierzami symetrycznymi spełniającymi równość:

$$tr(A^2B^2) = tr((AB)^2).$$

Wykaż, że $AB = BA$.

**Zadanie 5a. (5p)** Załóżmy, że $W$ jest taką podprzestrzenią $M_n(K)$, że $tr(AB) = 0$, dla wszystkich $A, B \in W$. Znajdź maksymalny możliwy wymiar $W$.

**Zadanie 5b. (5p)** Pokaż, że dla każdej liczby nieparzystej $d > 0$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że liczba $m^d + 7$ jest podzielna przez $2^n$. Czy teza zachodzi również dla $d = 2$?

**Zadanie 5c. (5p)** Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną o śladzie równym 0. Pokaż, że istnieje macierz ortogonalna $Q \in M_2(\mathbb{R})$ taka, że macierz $Q^TAQ$ ma same zera na przekątnej.

**Zadanie 5d. (5p)** Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą macierzami symetrycznymi, których wszystkie wartości własne są większe niż 1. Pokaż, że dla każdej rzeczywistej wartości własnej $\gamma$ macierzy $AB$ mamy $|\gamma| > 1$.

**Zadanie 6. (20p)** Rozważmy izometrię $\phi$ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle , \rangle)$ (nie znamy tego iloczynu) daną w bazie standardowej macierzą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Pokaż, że $\phi$ nie jest ani symetrią prostopadłą, ani obrotem.
- Pokaż, że $\phi$ można przedstawić jako złożenie trzech symetrii prostopadłych.
- Pokaż, że jeśli $\sigma$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $V$ wymiaru $n$ taką, że

  $$\dim \ker(\sigma - \mathrm{id}) = n - s,$$

  to $\sigma$ nie można przedstawić jako złożenia mniej niż $s$ symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni wymiarów $n-1$ (takie symetrie prostopadłe nazwaliśmy odbiciami).