GAL II* Kolokwium 1, 15 kwietnia 2021

Uwaga: plik ma dwie strony. Rozwiązania składają Państwo tylko na Moodle.

Zadanie 1. (15p) Rozważmy endomorfizm ϕ przestrzeni $\mathbb{C}^4$ dany w bazie standardowej macierzą:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(5p) Wyznacz macierz ϕ w postaci Jordana.
(5p) Wyznacz A^{100}.
(5p) Wyznacz dowolną macierz B taką, że $B^2 = A$.

Zadanie 2. (15p) Forma dwuliniowa h zadana jest na przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ przy pomocy macierzy

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(9p) Wyznacz bazę prostopadłą przestrzeni (V, h). Czy (V, h) ma bazę złożoną z wektorów izotropowych?
(6p) Pokaż, że są dokładnie dwie podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane wymiaru 2 w (V, h).

Zadanie 3. (15p) Niech $a \in \mathbb{R}$. Dla $n > 1$ formy h_a zadane są na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ macierzami postaci:

$$G(h_a, st) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}.$$

(5p) Pokaż, że dla $a > 2$ forma h_a jest iloczynem skalarnym.
(5p) Znajdź sygnaturę formy h_1.
(5p) Rozważ przestrzeń $V = (K^n, h_a)$, gdzie K – ciało. Pokaż, że dla $a \neq 1$ mamy $\dim V^\perp \leqslant 1$.

Zadanie 4. (15p)
(2p) Udowodnij, że dla macierzy $X \in M_2(K)$ nad ciałem K mamy $X^2 - \operatorname{tr}(X)X + \det(X)I = 0$.
(5p) Pokaż, że $\det(X) = 0$, gdzie $X \in M_2(\mathbb{R})$ spełnia, dla pewnego całkowitego $n > 2$, równanie:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(8p) Pokaż, że istnieje tylko jedna macierz $X \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ taka, że $X^5 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5a. (5p) Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle , \rangle$ oraz niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią. Pokaż, że dla każdego $v \in V$ wektor $u \in W$ jest obrazem v przy rzucie prostopadłym na W wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $w \in W$ mamy $\|v - u\| \leqslant \|v - w\|$, gdzie $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Zadanie 5b. (5p) Wyznacz postać Jordana endomorfizmu nilpotentnego ϕ spełniającego warunki:

$$\begin{cases} \dim \ker \phi^2 & = 7 \\ \dim \ker \phi^5 & = 14 \\ \dim(\ker \phi^5 \cap \operatorname{im} \phi^5) & = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 5c. (5p) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru, zaś niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to V$ będą przekształceniami liniowymi, przy czym $(\mathrm{id}_W - \psi \circ \phi) \in \mathrm{End}(W)$ jest nilpotentny. Wskaż warunek konieczny i dostateczny, aby $(\mathrm{id}_V - \phi \circ \psi) \in \mathrm{End}(V)$ był również nilpotentny.

Zadanie 5d. (5p) Czy każda niezerowa macierz $A \in M_3(\mathbb{Q})$ jest kongruentna nad $\mathbb{Q}$ do macierzy, która ma dokładnie 3 różne wyrazy? Dla wyjaśnienia: macierz $I \in M_3(\mathbb{Q})$ ma dokładnie 2 różne wyrazy: 0, 1.

Zadanie 6. (20p) Macierz $P \in M_n(\mathbb{C})$ nazwiemy stochastyczną, jeśli wszystkie jej wyrazy są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi oraz gdy suma wyrazów w każdym jej wierszu wynosi 1. Niech M_n będzie podzbiorem $\mathbb{C}$ złożonym ze wszystkich wartości własnych macierzy stochastycznych w $M_n(\mathbb{C})$. Przez wielokąt wypukły o wierzchołkach $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}$ rozumieć będziemy podzbiór $\mathbb{C}$ złożony ze wszystkich elementów postaci $a_1 p_1 + \ldots + a_r p_r$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geqslant 0$. dla $i = 1, \ldots, r$, oraz $a_1 + \ldots + a_r = 1$.

(4p) Niech $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy stochastycznej P o wartości własnej λ. Wykaż, że jeśli $Q \subset \mathbb{C}$ jest wielokątem wypukłym o wierzchołkach we współrzędnych wektora z, to zachodzi zawieranie $\lambda \cdot Q = \{\lambda \cdot q \mid q \in Q\} \subseteq Q$.

(8p) Pokaż, że M_n zawiera 1, jest symetryczny względem prostej $\mathrm{Re}(z)$ oraz, że $M_n \subset \{z : |z| \leqslant 1\}$. Wykaż ponadto, że jeśli $\lambda \in M_n$ i $|\lambda| = 1$, to λ jest pierwiastkiem z 1.

(8p) Wykaż, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są zespolonymi wartościami własnymi macierzy P rozmiaru 3×3 o nieujemnych wyrazach rzeczywistych, to $3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geqslant (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2$. Wywnioskuj stąd, że zbiór $M_3 \setminus \mathbb{R}$ jest zawarty w trójkącie równobocznym o wierzchołkach w pierwiastkach stopnia 3 z 1.